

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PARIS VI

pour l'obtention du

DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Spécialité: Mathématiques

par M. Jean-Pierre BÉNÉJAM

Sujet de la thèse: Propriétés algébriques des
langages du premier ordre

1972

Soutenue le 18 DEC 1972 devant la Commission d'examen

composée de: Président M. P. LELONG

Examineurs M M. L. NOLIN

R. FRAÏSSÉ

Invité M. R.C. LYNDON

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PARIS VI

pour l'obtention du

DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Spécialité: Mathématiques

par M. Jean-Pierre BÉNÉJAM

Sujet de la thèse: Propriétés algébriques des
langages du premier ordre



Soutenue le 18 DEC. 1972 devant la Commission d'examen

composée de: Président M. P. LELONG

Examineurs M M. L. NOLIN

R. FRAÏSSÉ

Invité M. R.C. LYNDON

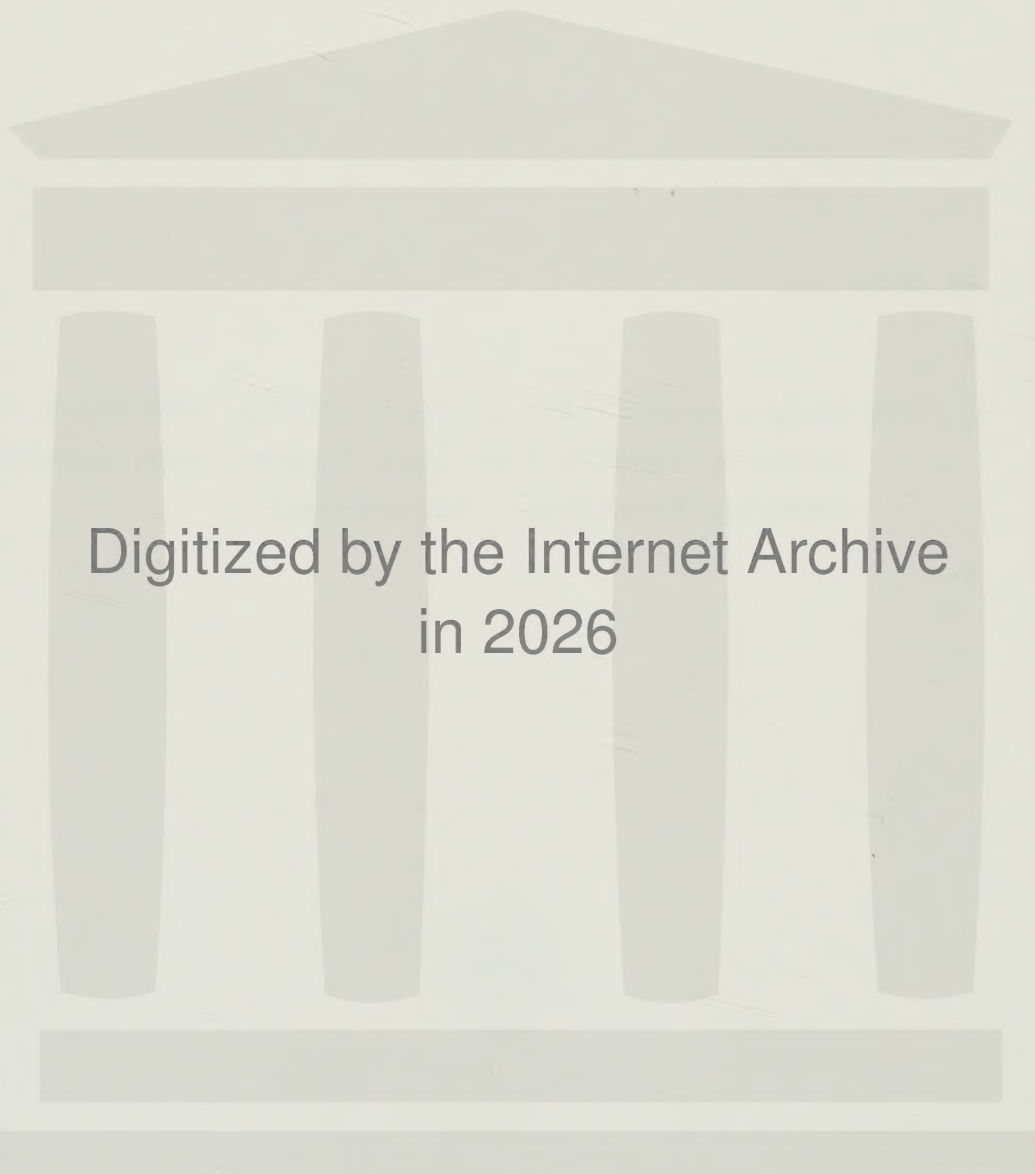


Je dédie ça

A...

*A comme Arpège, Amour, Absolu, Attente, Amitié, Amphitryon, Alcool,
Aventure, Algérie, Azur, Ange, Alcyon, Ancre, Abandon, Adieu,
Amertume, Arlequinade, Abracadabrant*

A...



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547102_0033

- *El libro que de mí trata, dijo don Quijote, a pocos habrá contentado.*
- *Antes es al revés, dijo el Bachiller, que como stultorum infinitus est numerus, infinitos son los que han gustado de la tal historia.*

CERVANTES

(Don Quijote de la Mancha)

INTRODUCTION

A. TARSKI [30], [31], R. L. VAUGHT [33] et R. FRAÏSSÉ [10] ont obtenu des critères algébriques caractérisant le fait pour une théorie d'être axiomatisée par un ensemble, fini ou non, d'énoncés universels. Une classification plus générale des théories a été donnée par H. J. KEISLER qui décrit la méthode dite des "sandwiches" [18]. Notre travail apporte des caractérisations, généralement plus fines, susceptibles d'être appliquées à n'importe quelle théorie.

Pour y parvenir, nous introduisons la notion de ludion^(★) qui, inspirée de celle de (k, p) -isomorphisme due à R. FRAÏSSÉ [12] et de la notion voisine de $(k \star p)$ -isomorphisme utilisée par J.-P. CALAIS [5], fournit un outil plus précis, dans la mesure où elle permet de munir d'un préordre la classe des structures de signature donnée (au lieu d'une équivalence) ; en fait, les buts poursuivis diffèrent fondamentalement, puisque les (k, p) -isomorphismes donnent essentiellement une caractérisation algébrique de l'équivalence logique entre multirelations.

Nous sommes amenés à préciser, pour une signature donnée, la syntaxe du langage égalitaire du premier ordre Λ dans lequel nous nous plaçons ; en effet, d'une part nous utilisons des quantifications simultanées de variables ; d'autre part les formules prénexes cessent de jouer le rôle privilégié qu'on leur attribue habituellement et nous définissons, pour chaque suite s de couples de nombres naturels, un fragment Λ_s du langage Λ . Le résultat fondamental est alors le suivant :

(★) Les s -ludions peuvent être décrits dans le langage de la théorie des jeux comme l'a fait A. EHRENFUCHT (Fundamenta Mathematicae, tome 49, p. 129-141, 1961) pour les (k, p) -isomorphismes.

« étant données des multirelations M et M' (de même signature finie), il existe un s -ludion de M vers M' si, et seulement si, tout énoncé de Λ_s qui est satisfait dans M l'est également dans M' ».

Le procédé bien connu de A. TARSKI [30] permet de ramener le cas d'une signature quelconque, éventuellement infinie, au théorème précédent.

Dans l'étude des théories finiment axiomatisables, nous obtenons le théorème suivant :

« Une classe $\mathcal{K}$ de multirelations est la classe des modèles d'une théorie finiment axiomatisable si, et seulement si, il existe une suite s telle qu'une multirelation M appartient à $\mathcal{K}$ dès qu'il existe une multirelation M' dans $\mathcal{K}$ et un s -ludion de M' vers M , la théorie étant alors axiomatisée par un énoncé de Λ_s ».

Une technique légèrement différente donne un résultat plus fin concernant les énoncés de $\Lambda_{s-}(< p, 0 >)$, dits s -universels (voir chapitre 3), ce qui permet de retrouver le cas particulier des énoncés universels traité par R. L. VAUGHT [33] et de préciser aussi un résultat de C. C. CHANG [6].

Ces théorèmes s'étendant au cas des théories non finiment axiomatisables. En outre, nous raffinons le théorème d'extension de HENKIN en combinant la méthode des diagrammes due à Abraham ROBINSON [27] et la méthode des s -ludions, ce qui nous conduit à caractériser la nature syntaxique des axiomes d'une théorie s -universelle, c'est-à-dire axiomatisée à l'aide d'énoncés s -universels, par la clôture de la classe de ses modèles pour certains types de restrictions (s^{-1} -restriction et restriction s^{-1} -logique: voir les définitions dans le chapitre 2). Nous obtenons ensuite une forme très générale du théorème de CHANG-ŁOŚ-SUSZKO [6],[25] sur l'union des suites extensives (ou chaînes) de multirelations par une construction qui, de plus, redonne les

"sandwiches". Enfin, nous trouvons le théorème suivant :

« pour une théorie s -universelle T à modèles infinis, les conditions suivantes sont équivalentes :

(u_1) pour toute famille $(T_i)_{i \in I}$ de théories s -universelles telle que la classe des modèles de T est l'union des classes des modèles des T_i , alors il existe $i \in I$ tel que $T_i \subseteq T$;

(u_2) T est engendrée par un modèle dénombrable ;

(u_3) pour tous modèles M' et M'' de T , il existe un modèle M de T tel que M' et M'' sont des s^{-1} -restrictions de M ».

P. KRAUSS [20] a montré récemment, dans le cas où s est vide, que (u_2) équivaut à (u_3).

Par ailleurs, associées aux s -ludions, les suites restrictives finies de multirelations fournissent d'autres caractérisations des théories et jouent dans le cas général le rôle joué par les multirelations finies dans le cas des énoncés universels (voir par exemple la notion de borne introduite par R. FRAÏSSÉ [10]).

Nous signalons enfin dans le chapitre 6 que la méthode des s -ludions peut s'étendre aux langages infinis. Une généralisation à ces langages de certains des résultats obtenus dans le cas fini fera l'objet d'une publication ultérieure.

Certains des résultats contenus dans ce travail ont été annoncés dans des Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences en 1970 et 1971 [2], [3], [4].

Je remercie vivement Monsieur le Professeur LELONG d'avoir accepté de présider le jury et je lui suis reconnaissant de l'intéressant sujet de seconde thèse qu'il m'a proposé.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur FRAÏSSÉ, de l'Université de Provence, qui m'a initié à la recherche et n'a cessé de m'apporter ses encouragements.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur NOLIN des conseils qu'il m'a toujours prodigués et de l'intérêt qu'il a pris à cette étude.

Ma reconnaissance va également à Monsieur le Professeur LYNDON, de l'Université de Michigan, qui a bien voulu examiner ma thèse et faire partie du jury.

Que mon ami Jean-Pierre CALAIS, Maître de Conférences à l'Université d'Orléans, soit particulièrement remercié : nos discussions et ses critiques m'ont permis de mettre au point certains résultats.

J'ai plaisir enfin à remercier le Secrétariat et le Service des Publications de l'Institut de Programmation pour la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0 - <u>Préliminaires</u>	1
Chapitre 1 - <u>s-ludion d'une multirelation vers une autre</u>	5
1.1 - Définition des s-ludions et propriétés immédiates	6
1.2 - L'application réciproque d'un s-ludion	9
1.3 - Rapports avec les (k, p) -isomorphismes et les $(k \star p)$ -isomorphismes	10
1.4 - La s-équivalence	14
1.5 - Application aux chaînes	22
Chapitre 2 - <u>Les s-ludions et les langages élémentaires</u>	29
2.1 - Le langage élémentaire Λ de signature μ	30
2.2 - Les théorèmes de caractérisation pour une signature finie	36
2.3 - Les théorèmes de caractérisation pour une signature quelconque	40
2.4 - L'équivalence s-logique	42
Chapitre 3 - <u>Les classes s-logiques</u>	47
3.1 - Définition et caractérisation sémantique des classes s-logiques	48
3.2 - Caractérisation sémantique des classes $(s(\langle p, 0 \rangle))$ -logiques	55
3.3 - Cas d'une signature quelconque	57

Chapitre 4 - <u>Les suites restrictives de multirelations et les classes s-logiques indécomposables pour la réunion et pour l'intersection</u>	59
4.1 - Définition des s-ludions entre suites restrictives	61
4.2 - La s-équivalence entre suites restrictives	64
4.3 - Première caractérisation des classes logiques par les suites restrictives	65
4.4 - Formule satisfaite dans une suite restrictive	68
4.5 - Classe s-logique indécomposable pour la réunion	71
4.6 - Seconde caractérisation des classes logiques par les suites restrictives	78
4.7 - Classe s-logique indécomposable pour l'intersection	81
Chapitre 5 - <u>Les théories élémentaires</u>	85
5.1 - Les $\mathcal{C}$ -théories élémentaires	86
5.2 - Les théories s-universelles	92
5.3 - Le théorème de HENKIN	94
5.4 - Les s-restrictions des modèles d'une théorie	97
5.5 - Le théorème de CHIANG-ŁOŚ-SUSZKO	100
5.6 - Théorie engendrée par une multirelation	104
5.7 - Caractérisation des théories par les suites restrictives	107
Chapitre 6 - <u>Les langages infinis</u>	109
6.1 - Le langage Λ_{ω_1} et les s-ludions	110
6.2 - Les théorèmes de caractérisation dans Λ_{ω_1}	115
Bibliographie	119
Index des définitions et notations	123

CHAPITRE 0 - Préliminaires

Bien que nos travaux soient exposés de manière non formelle, il est commode de concevoir qu'ils se situent dans le cadre d'une théorie des ensembles et des classes avec l'axiome du choix, de type VON NEUMANN - BERNAYS - GOEDEL, telle qu'elle est décrite, par exemple, par Paul J. COHEN [7].

Etant donnés deux ensembles A et B , une fonction f de A vers B est un triplet (A, G, B) où le graphe G de f , contenu dans $A \times B$ est fonctionnel autrement dit : pour tous $x \in A$, y et $z \in B$, si (x, y) et $(x, z) \in G$, alors $y = z$; le domaine de f , noté $\text{Dom } f$ est $\{x \in A / \text{il existe } y \in B \text{ tel que } (x, y) \in G\}$ le codomaine de f , noté $\text{Cod } f$, est $\{y \in B / \text{il existe } x \in A \text{ tel que } (x, y) \in G\}$; f est une fonction partielle [resp. une fonction totale, ou une application de A dans B] lorsque $\text{Dom } f \neq A$ [resp. $\text{Dom } f = A$]. B^A désigne l'ensemble des applications de A dans B , f_ϕ l'application vide (ϕ, ϕ, ϕ) et $g \circ f$ la fonction obtenue en composant f par la fonction g . Nous confondrons parfois une fonction avec son graphe, ce qui nous permettra de parler de la réunion des fonctions f et g , que nous noterons $f \cup g$, lorsque $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \phi$ ou lorsque f et g sont compatibles ; nous adopterons parfois la notation indicielle des applications avec $f_x = f(x)$ et $f = (f_x)_{x \in A}$. Si $A' \subseteq A$, la restriction $f \upharpoonright A'$ de f à A' est la fonction $(A', G \cap (A' \times B), B)$; on dit encore que f est une extension (ou un prolongement) de $f \upharpoonright A'$ à A .

Un ordinal a la définition usuelle et on identifiera l'ordinal initial dénombrable ω à l'ensemble N des nombres naturels, ce qui permettra de considérer pour tout $l \in N$, que $l = \{0, 1, \dots, l - 1\}$ et que l'ensemble A^l des l -uplets

d'éléments de A est l'ensemble des applications de I dans A , c'est-à-dire des suites de longueur I (ou des I -suites) dans A . Les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désigneront des ordinaux quelconques et ω_1 l'ordinal initial non dénombrable ; les ordinaux finis, et quelquefois ω , seront désignés par des lettres minuscules latines et on notera indifféremment $m \in \mathbb{N}$ ou $m < \omega$, de même $\inf_{i \in I} (n_i, p_i)$ sera noté $\bigcap_{i \in I} (n_i \cap p_i)$. Une application f d'un ordinal α dans un ensemble A , avec, pour tout $\beta < \alpha$, $f(\beta) = a_\beta$, sera notée $(a_\beta)_{\beta < \alpha}$ et sera appelée une α -suite dans A , ou encore, une famille d'éléments de A indexée par α .

L'ensemble des parties [resp. des parties finies ; des parties finies ou dénombrables] de A sera noté $\mathcal{P}(A)$ [resp. $\mathcal{P}_\omega(A)$; $\mathcal{P}_{\omega_1}(A)$].

Un cardinal est défini comme un ordinal initial, de sorte que le cardinal d'un ensemble A , noté $\bar{A}$, est le plus petit ordinal équipotent à A .

Etant donnés un ordinal α , des ensembles A et B , des α -suites $a = (a_\beta)_{\beta < \alpha} \in A^\alpha$ et $b = (b_\beta)_{\beta < \alpha} \in B^\alpha$, nous noterons $b \circ a^{-1}$ le triplet

$$(\text{Cod } a, \{(a_\beta, b_\beta) \in A \times B / \beta < \alpha\}, \text{Cod } b) ;$$

$b \circ a^{-1}$ est une application [resp. une application bijective] de $\text{Cod } a$ sur $\text{Cod } b$ si, et seulement si, pour tous β et $\gamma < \alpha$, $a_\beta = a_\gamma$ implique [resp. équivaut à] $b_\beta = b_\gamma$. Si $b \circ a^{-1}$ est une bijection, alors l'application réciproque $(b \circ a^{-1})^{-1} = a \circ b^{-1}$.

Etant donnés un ordinal $\alpha' \leq \alpha$ et une application strictement croissante h de α' dans α , on dit que l'application $a \circ h$ est une suite extraite (ou une sous-suite) de la suite $a = (a_\beta)_{\beta < \alpha}$ et on la désigne par $(a_{h_\beta})_{\beta < \alpha'}$.

L'ensemble des suites finies (c'est-à-dire de longueur finie) dans A (ou des mots dans A), sera noté $\mathcal{M}(A)$; la suite vide (ϕ, ϕ, A) dans A sera simplement désignée par ϕ et la concaténation entre suites sera représentée par le symbole $\frown$.

Si n et $p \in \mathbb{N}$, le couple des entiers p et n sera noté $\langle p, n \rangle$.

Si $m \in \mathbb{N}$, on dit que R est une relation m -aire dans A lorsque $R \subseteq A^m$; si $A' \subseteq A$, $R \upharpoonright A'$ désigne la restriction $R \cap A'^m$ de R à A' et on dit que R est une extension de $R \upharpoonright A'$ à A .

On notera $R(x) = +$ [resp. $-$] au lieu de $x \in R$ [resp. $x \notin R$] [12].

Une signature (finitaire) est un élément $(m_\gamma)_{\gamma < \delta}$ de ω^δ .

Un élément $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ de $(\mathcal{M}(A))$ est une multirelation (finitaire) de signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$ dans A lorsque, pour tout $\gamma < \delta$, R_γ est une relation m_γ -aire dans A ; A est appelé la base de M , elle est notée $|M|$; le cardinal de $|M|$ est noté $\overline{|M|}$. $M \upharpoonright A'$ désigne la restriction de M à A' , c'est-à-dire $(R_\gamma \upharpoonright A')_{\gamma < \delta}$.

Etant données une multirelation M de signature μ dans A et une α -suite a dans A , le couple (M, a) est appelé un système relationnel de signature (μ, α) dans A .

Pour la commodité des raisonnements, il est d'usage de considérer des multirelations de base vide, encore qu'une réalisation d'un langage soit toujours une structure non vide. Pour $m > 0$, $\phi^m = \phi$, donc il existe une seule relation m -aire de base vide ; mais il existe deux relations 0-aires dans tout ensemble (même vide), donc il peut y avoir plusieurs multirelations de signature μ donnée de base vide si $0 \in \text{Cod } \mu$.

Une relation $R(n+1)$ -aire de base A , fonctionnelle, c'est-à-dire telle que, pour tous $(x_i)_{i < n} \in A^n$, y et $z \in A$, si $R(x_0, \dots, x_{n-1}, y) = +$ et $R(x_0, \dots, x_{n-1}, z) = +$, alors $y = z$, définit une fonction partielle f

(à n arguments) de A^n vers A , dont le graphe est R et dont le domaine est $\{(x_i)_{i < n} \in A^n / \text{il existe } y \in A \text{ tel que } R(x_0, \dots, x_{n-1}, y) = +\}$.

Etant données deux multirelations $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ et $M' = (R'_\gamma)_{\gamma < \delta}$, de signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$, un isomorphisme partiel (ou local) [12] f de M vers M' est une fonction partielle f de $|M|$ vers $|M'|$ telle que, pour tous $\gamma < \delta$ et $x \in |M|^{m_\gamma}$, $R_\gamma(x) = R'_\gamma(f \circ x)$. Si $\mu = \emptyset$, un isomorphisme partiel est simplement une bijection de $\text{Dom } f$ sur $\text{Cod } f$.

Un plongement isomorphique (ou un isomorphisme) f de M dans M' est un isomorphisme partiel de M vers M' tel que $\text{Dom } f = |M|$; on note alors : $f(M) = M' \restriction \text{Cod } f$.

On peut définir aisément les types d'isomorphie des relations ou des multirelations, en particulier les types des chaînes (ou ordres totaux), qui coïncident avec les ordinaux dans le cas des bons ordres et sur lesquels on peut construire une arithmétique ; on considèrera ainsi le type $\omega^\star$ de l'ordre usuel des entiers négatifs, le type η de l'ordre usuel dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et le type $\omega + \omega^\star + \omega$.

Il n'y a aucune difficulté à définir la notion de relation dans une classe ; nous parlerons alors de "relation" : c'est le cas des équivalences que nous définirons dans la classe des systèmes relationnels de signature donnée. Généralement, lorsque nous envisagerons une "relation" d'équivalence R dans une classe (ou un ensemble) A , nous dirons souvent que " A est finie à l'équivalence R près" plutôt que de dire que "la classe-quotient A / R de A par R est finie".

Les autres notations qui nous seront nécessaires, notamment les notations spécifiquement logiques à partir du chapitre 2, seront introduites ou rappelées au fur et à mesure.

CHAPITRE 1 - s-ludion d'une multirelation vers une autre

Introduction

Dans les trois premiers paragraphes, nous donnons la définition du s-ludion d'une multirelation vers une autre, avant d'étudier son application réciproque, puis de décrire les rapports qui lient les s-ludions aux (k, p) -isomorphismes introduits par R. FRAÏSSÉ [11] ou aux $(k \star p)$ -isomorphismes de J.-P. CALAIS [5]. Les multirelations considérées ici ne sont pas forcément de signature finie.

Le reste du chapitre est consacré à l'étude des propriétés algébriques ou combinatoires des s-ludions. La "relation" de préordre définie par le s-ludion sur les systèmes relationnels de même signature induit une "relation" d'équivalence, la s-équivalence, moins fine que la (k, p) -équivalence et la $(k \star p)$ -équivalence, mais qui s'avère pourtant compatible avec les opérations très générales d'addition et de multiplication des multirelations définies par J.-P. CALAIS [5] et l'opération plus classique de multiplication réduite [15]; elle est étudiée dans le quatrième paragraphe. Enfin, dans le dernier paragraphe, nous nous intéressons aux relations d'ordre total (ou chaînes), plus particulièrement aux chaînes discrètes : nous caractérisons leur s-équivalence par une condition sur les cardinalités.

1.1 - Définition des s-ludions et propriétés immédiates

M et M' étant deux multirelations de même signature μ , on définit comme suit les s-ludions de M vers M', où $s \in \mathcal{M}(N^2)$, par récurrence sur la longueur de s :

- (i) tout isomorphisme partiel de M vers M' est un ϕ -ludion de M vers M' ;
- (ii) pour n et p $\in N$, un isomorphisme partiel f de M vers M' est un $(s_{\prec}(\prec p, n \succ))$ -ludion de M vers M' lorsque, pour tout $b \in |M|^n$, il existe un isomorphisme partiel $\bar{f}$ prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } b$ tel que, pour tout $c' \in |M'|^p$, il existe un isomorphisme partiel g qui prolonge $\bar{f}$ et qui est un s-ludion de M vers M', vérifiant : $\text{Cod } g = \text{Cod } \bar{f} \cup \text{Cod } c'$.

Un s-ludion est dit de longueur 1 lorsque s est de longueur 1.

Remarque - L'isomorphisme partiel $\bar{f}$ est manifestement un $(s_{\prec}(\prec p, 0 \succ))$ -ludion de M vers M'.

Un s-ludion de M vers M sera dit un s-ludion de M.

1.1.1 - Tout isomorphisme partiel est un $(\prec 0, 0 \succ)$ -ludion ; tout $(s_{\prec}(\prec 0, 0 \succ))_t$ -ludion est un (s_t) -ludion, et inversement.

1.1.2 - Tout $(s_{\prec}(\prec p, 0 \succ, \prec 0, n \succ))_t$ -ludion est un $(s_{\prec}(\prec p, n \succ))_t$ -ludion, et inversement.

L'énoncé est évident d'après la remarque précédente.

1.1.3 - Si $n' \leq n$ et $p' \leq p$, alors tout $(s_{\prec}(\prec p, n \succ))_t$ -ludion est un $(s_{\prec}(\prec p', n' \succ))_t$ -ludion.

1.1.4 - Si s' est une suite extraite de s, alors tout s-ludion est un s'-ludion, d'après 1.1.3 et 1.1.1.

1.1.5 - Tout $(s_{\langle p_1, n_1 \rangle, \langle p_2, n_2 \rangle})$ -ludion est un $(s_{\langle p_1, n_1 + n_2 \rangle})$ -ludion [resp. un $(s_{\langle p_1 + p_2, n_2 \rangle})$ -ludion].

Il suffit de vérifier en effet que tout $(\langle p_1, n_1 \rangle, \langle 0, n_2 \rangle)$ -ludion est un $(\langle p_1, n_1 + n_2 \rangle)$ -ludion et que tout $(\langle p_1, 0 \rangle, \langle p_2, n_2 \rangle)$ -ludion est un $(\langle p_1 + p_2, n_2 \rangle)$ -ludion. Mais l'inverse est faux : la bijection f de $\{3\}$ sur $\{2\}$ est un $(\langle 0, 2 \rangle)$ -ludion de l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$, mais n'est pas un $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle)$ -ludion ; on ne peut trouver en effet de $(\langle 0, 1 \rangle)$ -ludion g prolongeant f à $\{1, 3\}$ puisque poser $g(1) = 0$ ou $g(1) = 1$ ne prolonge pas g à $\{0, 1, 3\}$ ou à $\{1, 2, 3\}$ en un isomorphisme partiel.

1.1.6 - Si f est un s-ludion, alors toute restriction de f est encore un s-ludion ; en particulier, il existe un s-ludion de M vers M' si, et seulement si, l'application vide est un s-ludion de M vers M' .

1.1.7 - Tout isomorphisme partiel de M vers M' , prolongeable en un isomorphisme de M sur M' , est un s-ludion de M vers M' quel que soit $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$; en particulier, pour toute partie F de $|M|$, l'identité sur F est un s-ludion de M quel que soit s .

Démonstration par récurrence sur la longueur de s : il suffit de prendre respectivement pour $\tilde{f}$ et g^{-1} dans (ii) la restriction de l'isomorphisme à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } b$ et de son inverse à $\text{Cod } \tilde{f} \cup \text{Cod } c'$.

1.1.8 Si f est un s-ludion de M vers M' et si f' est un s-ludion de M' vers M'' (M'' de même signature que M et M'), alors $f' \circ f$ est un s-ludion de M vers M'' .

Démonstration par récurrence sur la longueur de s en composant dans (ii) l'isomorphisme partiel $\bar{f}$ [resp. g] de M vers M' par l'isomorphisme partiel homologue $\bar{f}'$ [resp. g'] de M' vers M'' .

1.1.9 - Etant données les multirelations $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ et $M' = (R'_\gamma)_{\gamma < \delta}$, tout s-ludion de M vers M' est, pour chaque $\gamma < \delta$, un s-ludion de R_γ vers R'_γ .

Plus généralement, si ν est une signature extraite de μ , tout s-ludion de M vers M' est un s-ludion de M_ν vers M'_ν .

Mais inversement, si pour chaque $\gamma < \delta$, f est un s-ludion de R_γ vers R'_γ , alors f n'est généralement pas un s-ludion de M vers M' .

Il suffit de prendre pour R_0, R_1, S_0 l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ et pour S_1 l'ordre qu'on obtient en permutant 1 et 2 : l'identité f sur $\{0\}$ n'est pas un $(\langle 2, 0 \rangle)$ -ludion de (R_0, R_1) vers (S_0, S_1) , puisqu'on ne peut pas trouver deux entiers x et y tels que f soit prolongeable en un isomorphisme partiel g à $\{0, x, y\}$, avec $g(x) = 1$ et $g(y) = 2$.

1.2 - L'application réciproque d'un s-ludion

Pour $l \neq 0$, à tout élément $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < l}$ de $(N^2)^l$, nous associerons l'élément de $(N^2)^{l+1}$

$$s^{-1} = (\langle 0, p_0 \rangle, \langle n_0, p_1 \rangle, \langle n_1, p_2 \rangle, \dots, \langle n_{l-1}, 0 \rangle).$$

Pour $l = 0$, c'est-à-dire pour $s = \phi$, nous conviendrons que $\phi^{-1} = (\langle 0, 0 \rangle)$.

1.2.1 - Tout $(s^{-1})^{-1}$ -ludion est un s-ludion, et inversement, d'après 1.1.1 .

1.2.2 - Tout $(s \smile t)^{-1}$ -ludion est un $(s^{-1} \smile t^{-1})$ -ludion, et inversement, d'après 1.1.2

1.2.3 - Un isomorphisme partiel f de M vers M' est un s-ludion de M vers M' si, et seulement si, l'application réciproque f^{-1} est un s^{-1} -ludion de M' vers M .

Démonstration par récurrence sur la longueur de f : soit f un $(s \smile \langle p, n \rangle)$ -ludion de M vers M' ; à tout $b \in |M|^n$ correspond $b' \in |M'|^n$ tel que, pour tout $c' \in |M'|^p$, il existe un s^{-1} -ludion g^{-1} de M' vers M , avec $\text{Dom } g^{-1} = \text{Cod } f \cup \text{Cod } b' \cup \text{Cod } c'$; donc f^{-1} est un $(s^{-1} \smile \langle 0, p \rangle, \langle n, 0 \rangle)$ -ludion, c'est-à-dire un $(s \smile \langle p, n \rangle)^{-1}$ -ludion de M' vers M .

Donc, d'après 1.1.6 :

Corollaire - Il existe un s-ludion de M vers M' si, et seulement si, il existe un s^{-1} -ludion de M' vers M .

1.3 - Rapports avec les (k, p) -isomorphismes et les $(k \star p)$ -isomorphismes

Etant donnés k et p dans N , R. FRAÏSSÉ définit ainsi le (k, p) -isomorphisme de M vers M' [12], par récurrence sur k :

- (i') tout isomorphisme partiel de M vers M' est un $(0, p)$ -isomorphisme quel que soit p ;
- (ii') un isomorphisme partiel f de M vers M' est un $(k + 1, p)$ -isomorphisme de M vers M' lorsque, pour tout entier positif ou nul $q \leq p$,
 - 1° pour tout $a' \in |M|^q$, il existe un $(k, p - q)$ -isomorphisme de M vers M' prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } a$,
 - 2° pour tout $a' \in |M'|^q$, il existe un $(k, p - q)$ -isomorphisme $\bar{f}$ de M vers M' , prolongeant f , tel que $\text{Cod } \bar{f} = \text{Cod } f \cup \text{Cod } a'$.

Afin d'obtenir une extension naturelle au cas où k est un ordinal quelconque et p un cardinal éventuellement infini, J.-P. CALAIS [5] reprend une définition légèrement différente en modifiant comme suit la condition (ii') :

- un isomorphisme partiel f de M vers M' est un $(k + 1 \star p)$ -isomorphisme de M vers M' lorsque,

- 1°-pour tout $a \in |M|^p$, il existe un $(k \star p)$ -isomorphisme de M vers M' prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } a$,
- 2°-pour tout $a' \in |M'|^p$, il existe un $(k \star p)$ -isomorphisme $\bar{f}$ de M vers M' ; prolongeant f , tel que $\text{Cod } \bar{f} = \text{Cod } f \cup \text{Cod } a'$.

Remarque - J.-P. CALAIS note $(k \star p^+)$, où p^+ désigne le cardinal successeur de p , ce que nous notons ici $(k \star p)$.

1.3.1 - Pour tout isomorphisme partiel f de M vers M' , f est un $(\leq p, 0 >)$ -ludion et un $(\leq 0, p >)$ -ludion si, et seulement si, f est un $(1, p)$ -isomorphisme [resp. $(1 \star p)$ -isomorphisme].

C'est une conséquence immédiate des définitions.

1.3.2 - Etant donnés k et p dans N , tout (k, p) -isomorphisme est un s -ludion et un s^{-1} -ludion, pour tout s de la forme $(\leq p_i, n_i >)_{i < l}$ tel que :

$$1^\circ. k = 2l \text{ ou } 2l - 1 ;$$

$$2^\circ. \sum_{i < l} (n_i + p_i) \leq p ;$$

$$3^\circ. \prod_{i < l} n_i \cdot p_i = 0 \text{ si } k = 2l - 1.$$

Démonstration par récurrence sur l , à partir de 0 par la condition (i') si k est pair, à partir de 1 par la proposition 1.3.1 sinon. Soit f un $(k + 2, p)$ -isomorphisme de M vers M' , avec $k + 2 = 2l + 2$ ou $2l + 1$; pour tous $n_1 \leq p$ et $a \in |M|^{n_1}$, il existe un $(k + 1, p - n_1)$ -isomorphisme $\bar{f}$ prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } a$ et, pour tous $p_1 \leq p - n_1$ et $a' \in |M'|^{p_1}$, il existe un $(k, p - n_1 - p_1)$ -isomorphisme g , prolongeant $\bar{f}$, tel que $\text{Cod } g = \text{Cod } \bar{f} \cup \text{Cod } a'$; or, par l'hypothèse de récurrence g est un s -ludion et un s^{-1} -ludion pour tout s de la forme $(\leq p_i, n_i >)_{i < l}$, où $k = 2l$ ou $2l - 1$, qui vérifie :

$$- \sum_{i < l} (n_i + p_i) \leq p - n_1 - p_1, \text{ donc } \sum_{i \leq l} (n_i + p_i) \leq p ;$$

$$- \prod_{i < l} n_i \cdot p_i = 0 \text{ si } k = 2l - 1, \text{ donc } \prod_{i \leq l} n_i \cdot p_i = 0$$

si $k + 2 = 2l + 1$; on conclut par la condition (ii).

1.3.3 - Etant donnés k et p dans N, tout (k * p)-isomorphisme est un s-ludion
et un s⁻¹-ludion pour tout s dans (N²)¹, de la forme (< p, p >, ..., < p, p >)
ou (< p, p >, ..., < p, 0 >) suivant que k = 21 ou 21 - 1.

Démonstration analogue à la précédente.

1.3.4 - Si $1 > 0$, les réciproques des propositions 1.3.2 et 1.3.3 sont généralement fausses : reprenant l'exemple de 1.1.5, la bijection de {3} sur {2} est un (< 1, 1 >)-ludion et un (< 0, 1 >, < 1, 0 >)-ludion de l'ordre usuel sur N, mais n'est pas un (2, 2)-isomorphisme, ni un (2 * 1)-isomorphisme.

On a seulement les propositions suivantes :

1.3.5 - Etant donné s = (< p_i, p_i > _{i < 1}, avec $\sum_{i < 1} p_i = p$, tout s-ludion
[resp. s⁻¹-ludion] est un (1, p)-isomorphisme.

Démonstration par récurrence sur 1 : soit f un (s-(< p₁, p₁ >))-ludion de M vers M'. Pour tous q ≤ p₁ et a ∈ |M|^q [resp. a' ∈ |M'|^q], f est prolongé en un (s-(< p₁, 0 >))-ludion [resp. s-ludion] $\bar{f}$, donc un s-ludion, tel que Dom $\bar{f}$ = Dom f U Cod a [resp. Cod $\bar{f}$ = Cod f U Cod a'] ; par l'hypothèse de récurrence, $\bar{f}$ est un (1, p)-isomorphisme, donc f est un (1 + 1, p + p₁)-isomorphisme de M vers M'.

1.3.6 - Etant donné s = (< p, p >, ..., < p, p >) dans (N²)¹, tout s-ludion
[resp. s⁻¹-ludion] est un (1 * p)-isomorphisme.

Démonstration analogue à la précédente.

COROLLAIRE - Etant donnée une partie non vide L de 1, tout (< p_i, n_i >)_{i < 1}-ludion
est un ($\bar{L} * p$)-isomorphisme pour p = $\bigcap_{i \in L} (n_i \cap p_i)$ et, en posant $\cap L = 1'$ et
U L = 1'', un ($\bar{L} - 1 * p$)-isomorphisme pour p = p₁ ∩ n₁'' ∩ $\bigcup_{i \in L - \{1', 1''\}} (n_i \cap p_i)$.

C'est une simple conséquence de 1.1.3 et 1.1.4.

1.3.7 - Etant donnés les entiers l et p dans N , un isomorphisme partiel est un $(l \star p)$ -isomorphisme si, et seulement si, c'est un s -ludion pour chaque s , élément de $\{< 0, p >, < p, 0 >\}^1$.

Démonstration par récurrence sur l : soit f un isomorphisme partiel de M vers M' si f est un $(l + 1 \star p)$ -isomorphisme, alors, pour tout $a \in |M|^p$ [resp. $a' \in |M'|^p$], f est prolongeable en un $(l \star p)$ -isomorphisme $\bar{f}$ de M vers M' tel que $\text{Dom } \bar{f} = \text{Dom } f \cup \text{Cod } a$ [resp. $\text{Cod } \bar{f} = \text{Cod } f \cup \text{Cod } a'$], donc, pour tout $s \in \{< 0, p >, < p, 0 >\}^1$, $\bar{f}$ est un $(s \smallfrown < 0, p >)$ -ludion et un $(s \smallfrown < p, 0 >)$ -ludion, c'est-à-dire que $\bar{f}$ est un t -ludion pour chaque t , élément de $\{< 0, p >, < p, 0 >\}^1 + 1$ et inversement.

1.4 - La s-équivalence

Etant donnés les multirelations M et M' (de même signature μ), l'ordinal α , et les α -suites $a \in |M|^\alpha$, $a' \in |M'|^\alpha$, nous dirons que les systèmes relationnels (M, a) et (M', a') sont s-équivalents lorsque $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion et un s^{-1} -ludion de M vers M' ; nous noterons : $(M, a) \stackrel{s}{\sim} (M', a')$.

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, on écrit $M \stackrel{s}{\sim} M'$ au lieu de $(M, \phi) \stackrel{s}{\sim} (M', \phi)$ et cela signifie que l'application vide est un s-ludion et un s^{-1} -ludion de M vers M' , autrement dit, d'après 1.1.6, qu'il existe un s-ludion et un s^{-1} -ludion de M vers M' .

La s-équivalence est une "relation" d'équivalence sur la classe des systèmes relationnels de signature (μ, α) : elle est en effet réflexive d'après 1.1.7, symétrique d'après 1.2.3 et transitive d'après 1.1.8.

Notons que $(M, a) \stackrel{s}{\sim} (M', a')$ si, et seulement si, $(M, a) \stackrel{s^{-1}}{\sim} (M', a')$.

Remarque - Pour tout $s \in \mathcal{M}(N^2)$, l'isomorphie sur les multirelations de même signature est une équivalence plus fine que la s-équivalence ; nous pourrions donc parler de la s-équivalence de deux types (d'isomorphie).

1.4.1 - Rappelons que (M, a) et (M', a') sont dits $(k \star p)$ -équivalents [5] [resp. (k, p) -équivalents [12]] lorsque $a' \circ a^{-1}$ est un $(k \star p)$ -isomorphisme [resp. (k, p) -isomorphisme] de M vers M' .

Du paragraphe 1.3 résulte que

1°- la $(\leq p, 0 >)$ -équivalence est la $(1 \star p)$ -équivalence ;

2°- étant donnés $l > 0$ et p dans N ,

si (M, a) et (M', a') sont $(2l - 1 \star p)$ -équivalents, alors ils sont s-équivalents pour tout s dans $(N^2)^l$ de la forme $(\leq p, p >, \dots, \leq p, 0 >)$; si (M, a) et

(M', a') sont $(2l \star p)$ -équivalents, alors ils sont s-équivalents pour tout s dans $(N^2)^1$ de la forme $\langle p, p \rangle, \dots, \langle p, p \rangle$; si (M, a) et (M', a') sont s-équivalents pour tout s dans $(N^2)^1$ de la forme $\langle p, p \rangle, \dots, \langle p, p \rangle$, alors ils sont $(l \star p)$ -équivalents.

Des propositions analogues peuvent être énoncées avec la (k, p) -équivalence.

LEMME 1 - Etant donnés $s = \langle p_i, n_i \rangle_{i < l}$ et les systèmes relationnels (M, a) et (M', a') de signature (μ, α) , si (M, a) et (M', a') sont $(k \star p)$ -équivalents pour tous $k \geq 2l$ et $p \geq \bigcup_{i < l} p_i \cup \bigcup_{i < l} n_i$, alors ils sont s-équivalents.

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède et de 1.1.3.

LEMME 2 [12] - Etant donnés la signature μ finie et $m, k, p \in N$, le nombre de classes définies par la $(k \star p)$ -équivalence sur les systèmes relationnels de signature (μ, m) est fini.

PROPOSITION - Etant donnés la signature μ finie, $m \in N$ et $s \in \mathcal{M}(N^2)$, le nombre des classes définies par la s-équivalence sur les systèmes relationnels de signature (μ, m) est fini.

En effet, pour $s = \langle p_i, n_i \rangle_{i < l}$, avec $k = 2l$ et $p = \bigcup_{i < l} p_i \cup \bigcup_{i < l} n_i$, toute classe de s-équivalence est réunion de classes de $(k \star p)$ -équivalence.

1.4.2 - Sommes de multirelations et de fonctions

Etant donnée la signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$, soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille de multirelations $M_i = (R_i, \gamma)_{\gamma < \delta}$ de signature μ , indexée par un ensemble I , et $N = (S_\gamma)_{\gamma < \delta}$ une multirelation de signature μ sur I ; J-P CALAIS définit la N-somme $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ de $(M_i)_{i \in I}$ [5] comme suit :

$$- |M| = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times |M_i| ;$$

- pour tout $\gamma < \delta$ et pour toute suite $(i_k, a_k)_{k < m_\gamma} \in |M|^{m_\gamma}$, s'il existe $i \in I$ tel que $i_k = i$ quel que soit $k < m_\gamma$, alors

$$R_\gamma(i_k, a_k)_{k < m_\gamma} = R_{i, \gamma}(a_k)_{k < m_\gamma},$$

et $R_\gamma(i_k, a_k)_{k < m_\gamma} = S_\gamma(i_k)_{k < m_\gamma}$ sinon.

Cas particuliers - On retrouve la somme cardinale (ou directe) des M_i lorsque, pour tout $\gamma < \delta$, S_γ est la relation toujours fausse sur I ; avec $\delta = 1$, si chaque M_i se réduit à un ordre R_i et si I est un ordinal, S étant la relation d'ordre usuelle sur I , alors la S -somme des R_i est leur somme ordinale.

Etant donnée la famille $(M'_i)_{i \in I}$ de multirelations $M'_i = (R'_{i, \gamma})_{\gamma < \delta}$ de signature μ , sa N -somme M' , et, pour tout $i \in I$, la fonction f_i de $|M_i|$ vers $|M'_i|$, la somme cardinale (ou directe) f des f_i est la fonction de $|M|$ dans $|M'|$ ainsi définie :

$$- \text{Dom } f = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \text{Dom } f_i ;$$

- pour tout $i \in I$ et pour tout $a \in \text{Dom } f_i$, $f((i, a)) = (i, f_i(a))$.

LEMME [5] - Si f_i est un isomorphisme partiel de M_i vers M'_i pour chaque $i \in I$, alors la somme des f_i est un isomorphisme partiel de M vers M' .

PROPOSITION - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$, les familles $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ de multirelations et la multirelation N , toutes de signature μ , si M et M' sont respectivement les N -sommés de $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ et si, pour tout $i \in I$, f_i est un s -ludion de M_i vers M'_i , alors la somme f de f_i est un s -ludion de M vers M' .

Démonstration par récurrence sur la longueur de s à partir du lemme précédent :
 supposons que chaque f_i est un $(s \smallfrown \langle p, n \rangle)$ -ludion de M_i vers M'_i ; si
 $(i_k, b_k)_{k < n}$ est un élément de $|M|^n$, où $b_k \in |M_{i_k}|$, alors chaque f_i est prolongeable en un $(s \smallfrown \langle p, 0 \rangle)$ -ludion $\bar{f}_i$ à $\text{Dom } f_i \cup (|M_i| \cap \{b_k/k < n\})$ et la somme f des f_i est un isomorphisme partiel de M vers M' ; si $(i_h, c'_h)_{h < p}$ est un élément de $|M'|^p$, où $c'_h \in |M'_{j_h}|$, alors chaque $\bar{f}_i$ est prolongeable en un s -ludion g_i tel que $\text{Cod } g_i = \text{Cod } \bar{f}_i \cup (|M'_i| \cap \{c'_h/h < p\})$ et la somme g des g_i est, par l'hypothèse de récurrence, un s -ludion de M vers M' prolongeant $\bar{f}$; donc f est un $(s \smallfrown \langle p, n \rangle)$ -ludion de M vers M' .

COROLLAIRE - La s -équivalence sur les multirelations de même signature est compatible avec l'addition des multirelations, donc en particulier avec l'addition cardinale des multirelations et l'addition ordinale des ordres.

En effet, si pour chaque $i \in I$ f_i est un s -ludion et un s^{-1} -ludion de M_i vers M'_i , alors f_ϕ est un s -ludion et un s^{-1} -ludion de M vers M' .

1.4.3 - Produits de multirelations et de fonctions

Soit encore une famille $(M_i)_{i \in I}$ de multirelations $M_i = (R_i, \gamma)_{\gamma < \delta}$ de signature μ et S une relation unaire sur $\mathcal{B}(I)$. Le S -produit $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ de $(M_i)_{i \in I}$ est ainsi défini [5] :

- $|M| = \prod_{i \in I} |M_i|$;
- pour tout $\gamma < \delta$ et pour toute suite $(a_k)_{k < m_\gamma} \in |M|^{m_\gamma}$,

$$R_\gamma(a_k)_{k < m_\gamma} = S(\{i/R_{i, \gamma}(a_k(i))_{k < m_\gamma}\}).$$

Cas particulier - On retrouve le produit cardinal (ou direct) des M_i en prenant $S = \{I\}$.

Etant donnés la famille $(M'_i)_{i \in I}$, son S-produit M' et la famille $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions f_i de $|M_i|$ vers $|M'_i|$, le produit cardinal (ou direct) f des f_i est la fonction de $|M|$ dans $|M'|$ ainsi définie :

- $\text{Dom } f = \prod_{i \in I} \text{Dom } f_i$;
- pour tout $a \in \text{Dom } f$ et pour tout $i \in I$, $(f(a))(i) = f_i(a(i))$.

LEMME [5] - Si f_i est un isomorphisme partiel de M_i vers M'_i pour chaque $i \in I$, alors le produit des f_i est un isomorphisme partiel de M vers M' .

PROPOSITION - Etant données la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, les familles $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ de multirelations de signature μ et la relation unaire S sur $\mathcal{B}(I)$, si M et M' sont respectivement les S-produits de $(M_i)_{i \in I}$ et de $(M'_i)_{i \in I}$ et si, pour tout $i \in I$, f_i est un s-ludion de M_i vers M'_i , alors le produit f des f_i est un s-ludion de M vers M' .

Démonstration par récurrence sur la longueur de s à partir du lemme précédent :
supposons que chaque f_i est un $(s \smallfrown \langle p, n \rangle)$ -ludion de M_i vers M'_i ; si $(b_k)_{k < n}$ est un élément de $|M|^n$, alors, pour chaque $i \in I$, $(b_k(i))_{k < n} \in |M_i|^n$ et il existe un $(s \smallfrown \langle p, 0 \rangle)$ -ludion $\bar{f}_i$ prolongeant f_i à $\text{Dom } f_i \cup \{b_k(i)/k < n\}$; si $(c'_k)_{k < p}$ est un élément de $|M'|^p$, alors chaque $\bar{f}_i$ est prolongeable en un s-ludion g_i tel que $\text{Cod } g_i = \text{Cod } \bar{f}_i \cup \{c'_k(i)/k < p\}$ et, par l'hypothèse de récurrence, il existe un s-ludion de M vers M' qui est restriction du produit des g_i .

COROLLAIRE - La s-équivalence sur les multirelations de même signature est compatible avec la multiplication de multirelations, donc en particulier avec la multiplication cardinale.

1.4.4 - Quotient de multirelations et de fonctions par une équivalence

Etant données la multirelation $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ de signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$ et la relation d'équivalence E sur $|M|$ compatible avec M , c'est-à-dire telle que, pour tous $\gamma < \delta$ et $(a_k)_k <_{m_\gamma}$, $(b_k)_k <_{m_\gamma} \in |M|^{m_\gamma}$, si $E(a_k, b_k) = +$ pour chaque $k < m_\gamma$, alors $R(a_k)_k <_{m_\gamma} = R(b_k)_k <_{m_\gamma}$, on peut définir la multirelation, quotient de M par E , $M/E = (R_\gamma/E)_{\gamma < \delta}$, ainsi définie :

- $|M/E| = |M|/E$;
- pour tout $\gamma < \delta$ et pour tout $(a_k)_k <_{m_\gamma} \in |M|^{m_\gamma}$,
 $(R_\gamma/E)(a_k/E)_k <_{m_\gamma} = R_\gamma(a_k)_k <_{m_\gamma}$, où a_k/E désigne la classe d'équivalence de a_k suivant E .

Si f est un isomorphisme partiel de E vers une équivalence E' , on définit [5] la fonction f/E , quotient de f par E , en posant :

- pour tout $a \in |M|$, $(f/E)(a/E) = f(a)/E$.

PROPOSITION - Etant donné $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et les équivalences E et E' respectivement compatibles avec les multirelations M et M' de même signature, si f est un s-ludion de $M \smile E$ vers $M' \smile E'$, alors f/E est un s-ludion de M/E vers M'/E' .

Démonstration par récurrence sur la longueur de s : soit f un $(s \smile \langle p, n \rangle)$ -ludion de $M \smile E$ vers $M' \smile E'$; pour tout $(b_k/E)_k <_n \in |M/E|^n$, il existe un $(s \smile \langle p, 0 \rangle)$ -ludion $\bar{f}$ de $M \smile E$ vers $M' \smile E'$ prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \{b_k/k < n\}$, donc $\bar{f}/E$ est une fonction de M/E vers M'/E' prolongeant f/E ; pour tout

$(c'_k/E)_{k < p} \in (M'/E')^p$, il existe un s-ludion g de M/E vers M'/E' prolongeant $\bar{f}$ et tel que $\text{Cod } g = \text{Cod } \bar{f} \cup \{c'_k/k < p\}$; par l'hypothèse de récurrence, g/E est un s-ludion de M/E vers M'/E' prolongeant $\bar{f}/E$.

1.4.5 - Produits réduits de multirelations et de fonctions

Soit une famille $(M_i)_{i \in I}$ de multirelations de signature μ et un filtre S sur I ; on définit sur le S -produit M des M_i une relation d'équivalence E_S en posant :

pour tous $a, b \in \prod_{i \in I} |M_i|$, $E_S(a, b) = +$ lorsque $\{i/a(i) = b(i)\} \in S$.

Il est bien connu que E_S est compatible avec M : M/E_S est appelé le produit réduit des M_i suivant S et est noté traditionnellement $\prod_{i \in I} M_i/S$.

PROPOSITION - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$, les familles $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ de multirelations de signature μ et le filtre S sur I , si, pour tout $i \in I$, f_i est un s-ludion de M_i vers M'_i et si f désigne le produit de f_i , alors f/E_S est un s-ludion de $\prod_{i \in I} M_i/S$ vers $\prod_{i \in I} M'_i/S$.

Démonstration : d'après la proposition 1.4.4, il suffit de montrer, par récurrence sur la longueur de s , que f est un s-ludion de M/E_S vers M'/E'_S , où M et M' désignent respectivement les produits des M_i et des M'_i . Tout d'abord f est un isomorphisme partiel de M vers M' (lemme 1.4.3) ; f est aussi un isomorphisme partiel de E_S vers E'_S : en effet,

$\{i/a(i) = b(i)\} = \{i/f_i(a(i)) = f_i(b(i))\} = \{i/(f(a))(i) = (f(b))(i)\}$ et

$E_S(a, b) = E'_S(f(a), f(b))$; donc f est un isomorphisme partiel de M/E_S vers

M'/E'_S . Supposons que chaque f_i est un $(s_{<p, n>})$ -ludion de M_i vers M'_i ;

si $(b_k)_{k < n} \in |M|^n$, alors, pour chaque $i \in I$, il existe un $(s_{<p, 0>})$ -ludion

$\bar{f}_i$ prolongeant f_i à $\text{Dom } f_i \cup \{b_k(i)/k < n\}$; si $(c'_k)_k < p \in |M'|^p$, alors chaque $\bar{f}_i$ est prolongeable en un s-ludion g_i tel que $\text{Cod } g_i = \text{Cod } \bar{f}_i \cup \{c'_k(i)/k < p\}$, donc, par l'hypothèse de récurrence, le produit g des g_i est un s-ludion de $M \cup E_S$ vers $M' \cup E'_S$.

COROLLAIRE - La s-équivalence sur les multirelations de même signature est compatible avec la multiplication réduite des multirelations.

1.5 - Application aux chaînes

On convient de considérer la relation binaire de base vide comme une chaîne.

Il est clair que, si $s \neq \emptyset$, une chaîne de base vide ne peut être s -équivalente qu'à une chaîne de base vide.

Notations - Etant donnés la chaîne A et les éléments x et y de sa base,

$x \leq y (A)$ signifie que $A(x, y) = +$,

$x < y (A)$ signifie que $x \leq y(A)$ et $x \neq y$,

$x <_A < y$ [resp. $x \leq_A \leq y$] désigne l'intervalle

$A \uparrow \{a \in |A| / x < a < y\}$ [resp. $A \uparrow \{a \in |A| / x \leq a \leq y\}]$,

$A < y$ et $x <_A$ [resp. $A \leq y$ et $x \leq_A$] désignent respectivement l'intervalle initial

$A \uparrow \{a \in |A| / a < y\}$ et l'intervalle final $A \uparrow \{a \in |A| / x < a\}$ [resp.

$A \uparrow \{a \in |A| / a \leq y\}$ et $A \uparrow \{a \in |A| / x \leq a\}]$.

1.5.1 - Etant donnés n et $p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ et les chaînes A et B , il existe un

$(s \prec p, n >)$ -ludion de A vers B si, et seulement si, à tout $(a_k)_{k < n} \in |A|^n$ correspond $(b_k)_{k < n} \in |B|^n$ tel que à tout $(b_{n+k})_{k < p} \in |B|^p$ correspond $(a_{n+k})_{k < p} \in |A|^p$ vérifiant la condition suivante : pour chaque intervalle $a_i <_A < a_j$ [resp. $A < a_j$,

$a_i <_A$] ainsi déterminé, avec i et $j < n + p$, a_i et a_j étant consécutifs dans

$A \uparrow \{a_k / k < n + p\}$, il existe un s -ludion de $a_i <_A < a_j$ [resp. $A < a_j$, $a_i <_A$] vers $b_i <_B < b_j$ [resp. $B < b_j$, $b_i <_B$].

Démonstration : si $f_\emptyset$ est un $(s \prec p, n >)$ -ludion de A vers B , alors pour tout $(a_k)_{k < n} \in |A|^n$ il existe $(b_k)_{k < n} \in |B|^n$ tel que pour tout $(b_{n+k})_{k < p} \in |B|^p$ il existe $(a_{n+k})_{k < p} \in |A|^p$ vérifiant la condition suivante : si l'on pose $a = (a_k)_{k < n+p}$ et $b = (b_k)_{k < n+p}$, $b \circ a^{-1}$ est un s -ludion de A vers B , donc (1.1.6) $b \circ a^{-1} \upharpoonright |a_i <_A < a_j| = f_\emptyset$ est un s -ludion de $a_i <_A < a_j$ vers $b_i <_B < b_j$ pour chaque intervalle $a_i <_A < a_j$.

Inversement, si la condition de l'énoncé est satisfaite, on considère A comme la somme ordinale des chaînes $a_i < A < a_j$ et $A \uparrow \{a_i\}$, pour i et $j < n + p$; $b \circ a^{-1}$ est la somme des s-ludions f_ϕ de $a_i < A < a_j$ vers $b_i < B < b_j$ et $b \circ a^{-1} \uparrow \{a_i\}$ de $A \uparrow \{a_i\}$ vers $B \uparrow \{b_i\}$, donc, d'après la proposition 1.4.2, $b \circ a^{-1}$ est un s-ludion de A vers B, donc f_ϕ est un $(s_<(< p, n >))$ de A vers B.

COROLLAIRE - Etant donnés $n, p \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, deux chaînes A et B sont $(s_<(< p, n >))$ -équivalentes et $(s_<(< 0, p >, < n, 0 >))$ -équivalentes si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1°- à tout $(a_k)_{k < n} \in |A|^n$ correspond $(b_k)_{k < n} \in |B|^n$ tels que à tout $(b_{n+k})_{k < p} \in |B|^p$ correspond $(a_{n+k})_{k < p} \in |A|^p$ vérifiant la condition :
chaque intervalle $a_i < A < a_j$ [resp. $A < a_i, a_i \sim A$] ainsi déterminé, avec
 i et $j < n + p, a_i$ et a_j étant consécutifs dans $A \uparrow \{a_k / k < n + p\}$, est
s-équivalent à l'intervalle $b_i < B < b_j$ [resp. $B < b_j, b_i \sim B$] ;
- 2°- même énoncé qu'au 1° en échangeant A et B.

Remarque - Un résultat analogue concernant la $(k \star p)$ -équivalence se trouve dans [5], ou sous une forme plus faible $((k \star 1)$ -équivalence) dans [22].

1.5.2 - Chaînes discrètes

Rappelons qu'une chaîne est dite discrète lorsque tout élément de sa base a, s'il n'est pas le minimum, un prédécesseur et, s'il n'est pas le maximum, un successeur.

Répartissons les chaînes discrètes en 5 classes disjointes suivant qu'il s'agit de la chaîne vide ou de chaînes (non vides) :

- (i) avec maximum et minimum ;
- (ii) avec maximum, sans minimum ;
- (iii) sans maximum, mais avec minimum ;
- (iv) sans maximum ni minimum.

Etant donnée la suite $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < l}$ de $(N^2)^l$, avec $l > 0$, posons :

$$r(s) = \sum_{i < l} \left(\prod_{i < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) \right) (n_i + 1) p_i, \quad ,$$

en convenant que

$$\prod_{1 - 1 < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) = 1$$

On pourra poser :

$$r(\phi) = 0$$

Remarque - Le nombre $r(s)$ ne caractérise s en aucune façon, puisque, par exemple,

$$r(\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle) = r(\langle 12, 2 \rangle) = 36 ; \text{ également, } r(\langle p_i, n_i \rangle)_{i < l} =$$

$$r(\langle p_i, n_i \rangle)_{k \leq i < l}, \text{ où } k \text{ est le plus petit entier } i \text{ tel que } p_i \neq 0.$$

PROPOSITION 1 - Etant donné $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < l}$, avec $l > 0$, si $p_0 \neq 0$, alors

$$r(s) > r(s^{-1}) ;$$

En effet,
$$r(s^{-1}) = \sum_{i < l} \left(\prod_{i < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) \right) n_i$$

et
$$r(s) - r(s^{-1}) = \sum_{i < l} \left(\prod_{i < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) \right) ((n_i + 1) p_i - n_i) =$$

$$\sum_{i < l} \left(\prod_{i < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) \right) ((n_i + 1) (p_i - 1) + 1) =$$

$$(p_0 - 1) (n_0 + 1) \prod_{0 < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) +$$

$$\sum_{0 < i < l} \left(\prod_{i < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) \right) ((n_i + 1) (p_i - 1) + (n_i + 1) (p_i + 1)) + 1 =$$

$$(p_0 - 1) (n_0 + 1) \prod_{0 < j < l} (n_j + 1) (p_j + 1) + 2r(\langle p_i, n_i \rangle)_{0 < i < l} + 1$$

Remarque - On a encore :

$$r(s) - r(s^{-1}) = 2r(s) - \prod_{j < 1} (n_j + 1) (p_j + 1) + 1,$$

$$\text{d'où} \quad r(s) + r(s^{-1}) = \prod_{j < 1} (n_j + 1) (p_j + 1) - 1.$$

En raison de la proposition 1, nous supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe que, pour tout $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < 1}$ de $(N^2)^1$, $p_0 \neq 0$.

PROPOSITION 2 - Etant donné $s \in \mathcal{M}(N^2)$, si deux chaînes discrètes de la même classe ont des cardinaux $\geq r(s)$, alors elles sont s -équivalentes.

Démonstration par récurrence sur la longueur de s : soient $n, p \in N$ et $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < 1} \in (N^2)^1$; on a :

$$r(s \smallfrown \langle p, n \rangle) = p(n + 1) + (p + 1) (n + 1) r(s) \quad .$$

Supposons que A et B sont deux chaînes discrètes de la même classe, avec $\bar{A}$ et $\bar{B} \geq r(s \smallfrown \langle p, n \rangle)$.

Pour tout $(a_k)_{k < n} \in |A|^n$ tel que $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1}$ dans A , il existe nécessairement un intervalle $a_k < A < a_k + 1$, avec $k < n - 1$, ou $A < a_0$ ou $a_{n-1} < A$, de cardinal $\geq p + (p + 1) r(s)$, donc $> p - 1 + (p + 1) r(s)$, car si ces $n + 1$ intervalles avaient tous des cardinaux $\leq p - 1 + (p + 1) r(s)$, donc $< p - \frac{n}{n+1} + (p + 1) r(s)$, alors leur somme ordinale aurait un cardinal $< p(n + 1) - n + (p + 1) (n + 1) r(s)$, donc $\bar{A}$ serait $< p(n + 1) + (p + 1)(n + 1) r(s)$ ce qui est impossible. On peut donc faire correspondre $(b_k)_{k < n} \in |B|^n$, avec $b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{n-1}$ dans B , tel que, pour tout $k < n - 1$,

$$\overline{b_k} <_B \overline{b_{k+1}} = \overline{a_k} <_A \overline{a_{k+1}} \text{ si } \overline{a_k} <_A \overline{a_{k+1}} < p + (p+1)r(s)$$

et $\overline{b_k} <_B \overline{b_{k+1}} \geq p + (p+1)r(s)$ sinon; même chose pour $\overline{b_k} <_{B_0}$ et $\overline{b_{n-1}} <_{B_0}$.

Pour tout $(b_{n+k})_{k < p} \in |B|^P$, un des $n+p+1$ intervalles ainsi déterminés est nécessairement de cardinal $\geq r(s)$: en effet, l'intervalle $\overline{b_k} <_B \overline{b_{k+1}}$, tel que $\overline{b_k} <_B \overline{b_{k+1}} \geq p + (p+1)r(s)$, est scindé, par $b_{n+0}, \dots, b_{n+p-1}$, en $q+1$ intervalles, avec $q \leq p$, dont l'un au moins est de cardinal $\geq r(s)$, sinon $\overline{b_k} <_B \overline{b_{k+1}}$ serait $< q + (q+1)r(s)$, donc $< p + (p+1)r(s)$. On peut donc faire correspondre $(a_{n+k})_{k < p} \in |A|^P$ de façon que les intervalles homologues aient le même cardinal $< r(s)$, ou des cardinaux $\geq r(s)$. Des chaînes finies de même cardinal étant isomorphes, donc s -équivalentes, il résulte de l'hypothèse de récurrence que les intervalles homologues sont s -équivalents. Même raisonnement en échangeant s et s^{-1} , puis A et B , de sorte que, d'après le corollaire 1.5.1, les deux chaînes sont $(s, < p, n >)$ -équivalentes. CQFD

Remarque - Deux chaînes ayant des cardinaux $\geq r(s^{-1})$ ne sont pas forcément s -équivalentes : par exemple, si $s = (< 2, 0 >)$, alors $r(s) = 2$ et $r(s^{-1}) = 0$, mais il n'existe aucun s -ludion de la chaîne définie sur $\{0\}$ vers une chaîne définie sur $\{0, 1\}$.

COROLLAIRE - Deux chaînes discrètes infinies de la même classe sont s -équivalentes pour tout s de $\mathcal{M}(N^2)$; en particulier, les types de chaîne ω et $\omega + \omega^* + \omega$ sont s -équivalents pour tout s .

PROPOSITION 3 - Etant donné $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et deux chaînes discrètes A et B de la même classe, s'il existe un s -ludion de A vers B et si $\overline{A} < r(s)$, alors $\overline{B} \leq \overline{A}$.

Démonstration par récurrence sur la longueur de s : pour $s = \phi$, il n'y a plus rien à démontrer. Supposons qu'il existe un $(s, \langle p, n \rangle)$ -ludion de A vers B et que

$$\overline{A} < p(n+1) + (p+1)(n+1)r(s).$$

Si A est la chaîne vide, alors $B = A$.

Si A n'est pas vide, alors on peut choisir $a = (a_k)_{k < n} \in |A|^n$, avec $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1}$ dans A , tel que $\overline{A} < a_0$, $a_{n-1} < \overline{A}$ et chaque intervalle $a_k < \overline{A} < a_{k+1}$,

où $k < n-1$, ont des cardinaux $\leq p-1 + (p+1)r(s)$, c'est-à-dire $< p + (p+1)r(s)$

il existe $b = (b_k)_{k < n} \in |B|^n$ tel que $b \circ a^{-1}$ est un $(s, \langle p, 0 \rangle)$ -ludion de A vers B .

Il suffit évidemment de montrer que $\overline{B} < b_0 \leq \overline{A} < a_0$, $\overline{b_{n-1}} < \overline{B} \leq \overline{a_{n-1}} < \overline{A}$

et que, pour chaque $k < n-1$, $\overline{b_k} < \overline{B} < \overline{b_{k+1}} \leq \overline{a_k} < \overline{A} < \overline{a_{k+1}}$; pour cela, sup-

posons que l'une de ces inégalités n'est pas **satisfaite**, par exemple que

$$\overline{b_{n-1}} < \overline{B} > \overline{a_{n-1}} < \overline{A}.$$

- Si $\overline{b_{n-1}} < \overline{B} \geq p + (p+1)r(s)$, on peut choisir $(b_{n+k})_{k < p} \in |b_{n-1} < B|^p$

avec $b_n < b_{n+1} < \dots < b_{n+p-1}$ dans B , de façon que, pour tout $k < p$,

$\overline{b_{n+k-1}} < \overline{B} < \overline{b_{n+k}} = r(s)$ et que $\overline{b_{n+p-1}} < \overline{B} \geq r(s)$; il existe

$(a_{n+k})_{k < p} \in |a_{n-1} < A|^p$ tel que f_ϕ est un s -ludion de chaque $a_k < \overline{A} < a_{k+1}$

vers $b_k < \overline{B} < b_{k+1}$ (proposition 1.5.1) ; nécessairement $\overline{a_{n+p-1}} < \overline{A} < r(s)$

ou il existe $k < p$ tel que $\overline{a_{n+k-1}} < \overline{A} < \overline{a_{n+k}} < r(s)$, sinon $\overline{a_{n-1}} < \overline{A}$ serait

$\geq p + (p+1)r(s)$, donc, par l'hypothèse de récurrence, $\overline{b_{n+p-1}} < \overline{B}$ ou

$\overline{b_{n+k-1}} < \overline{B} < \overline{b_{n+k}} < r(s)$: contradiction.

- Si $\overline{b_{n-1}} < \overline{B} < p + (p+1)r(s) = p(r(s)+1) + r(s)$, alors, dans la division

de $\overline{b_{n-1}} < \overline{B}$ par $r(s)+1$ il existe un quotient q et un reste q' tel que

$\overline{b_{n-1}} < \overline{B} = q(r(s)+1) + q'$ avec $q' < r(s)+1$, de sorte que $q' \leq r(s)$ et $q < p$. On

peut choisir $(b_{n+k})_{k < q} \in |b_{n-1} < B|^q$, avec $b_n < b_{n+1} < \dots < b_{n+q-1}$,

de façon que, pour tout $k < q$, $\overline{b_n + k - 1} < B < \overline{b_n + k} = r(s)$ et que $\overline{b_n + q - 1} < B = q'$; il existe $(a_n + k)_{k < q} \in |a_n - 1 < A|^q$ tel que f_ϕ est un s-ludion de chaque $a_k < A < a_k + 1$ vers $b_k < B < b_k + 1$; nécessairement, soit $\overline{a_n + q - 1} < A < r(s)$, soit il existe un $k < q$ tel que $\overline{a_n + k - 1} < A < \overline{a_n + k} < r(s)$, sinon $\overline{a_n - 1} < A$ serait $\geq (q + 1) r(s) + q$, donc serait $\geq \overline{b_n - 1} < B$. Donc, ou bien $\overline{a_n + k - 1} < A < \overline{a_n + k} < r(s)$, et, par l'hypothèse de récurrence, $\overline{b_n + q - 1} < B < \overline{b_n + k} < r(s)$: contradiction. Ou bien $\overline{a_n + q - 1} < A < r(s)$ et, pour tout $k < q$, $\overline{a_n + k - 1} < A < \overline{a_n + k} \geq r(s)$; auquel cas $\overline{a_n - 1} < A \leq \overline{a_n + q - 1} \geq qr(s) + q = \overline{b_n - 1} < B \leq \overline{b_n + q - 1}$; d'autre part, toujours par l'hypothèse de récurrence, $q' = \overline{b_n + q - 1} < B \leq \overline{a_n + q - 1} < A$, donc $\overline{a_n - 1} < A \geq \overline{b_n - 1} < B$: contradiction. CQFD

THEOREME - Etant donné $s \in \mathcal{M}(N^2)$, deux chaînes discrètes de la même classe sont s-équivalentes si, et seulement si, elles ont soit le même cardinal $< r(s)$, soit des cardinaux $\geq r(s)$.

Démonstration : que la condition soit suffisante résulte de la proposition 2. Inversement, soient A et B deux chaînes discrètes de la même classe s-équivalentes ; si $\overline{A} < r(s)$, alors, d'après la proposition 3, $\overline{B} \leq \overline{A}$, mais il existe aussi un s-ludion de B vers A, donc $\overline{A} \leq \overline{B}$ et $\overline{A} = \overline{B}$; si $\overline{A} \geq r(s)$, alors on ne peut avoir $\overline{B} < r(s)$, sinon on obtiendrait $\overline{A} \leq \overline{B} < r(s)$, donc $\overline{B} \geq r(s)$.

COROLLAIRE [5] - Etant donnés l et $p \in N$, deux chaînes discrètes de la même classe sont $(l \star p)$ -équivalentes si, et seulement si, elles ont soit le même cardinal $< (p + 1)^l - 1$, soit des cardinaux $\geq (p + 1)^l - 1$.

En effet, d'après la proposition 1.3.7, deux chaînes sont $(l \star p)$ -équivalentes si, et seulement si, elles sont s-équivalentes pour les 2^l éléments s de $\{< 0, p >, < p, 0 >\}^l$; or $r(s)$ est maximum lorsque $s \in \{< p, 0 >\}^l$, auquel cas $r(s) = p \sum_{i < l} (p + 1)^i = (p + 1)^l - 1$.

CHAPITRE 2 - Les s-ludions et les langages élémentaires

Introduction

Le langage élémentaire (ou langage du premier ordre avec égalité), présenté dans le premier paragraphe, est peu différent de celui que décrivent par exemple J. L. BELL - A. B. SLOMSON [1] ou G. KREISEL - J.-L. KRIVINE [21] : simplement sa syntaxe autorise des quantifications simultanées d'un nombre fini de variables et ne manifeste, par ailleurs, aucun souci d'économie dans l'emploi des symboles logiques ; nous considérons également le langage Λ_s des formules dites de caractéristique **s**.

Bien que la notion de s-ludion soit plus générale que les notions de (k, p) -isomorphisme [12] et de $(k \star p)$ -isomorphisme [6], et en diffère même sensiblement, ne serait-ce que dans la construction d'une formule de Λ_s caractérisant un système relationnel, elle conduit cependant à des théorèmes de caractérisation analogues ; nous distinguons le cas des langages de signature finie, étudiés dans le paragraphe 2, et celui des langages de signature infinie, qui requiert quelques précautions et que nous étudions dans le paragraphe 3.

Le dernier paragraphe traite de l'équivalence s-logique et, sans doute pour respecter les canons actuels de la logique, nous n'hésitons pas à énoncer un résultat sur les formules prénexes, bien que les formules envisagées ici ne le soient pas nécessairement. Nous définissons enfin la notion de s-plongement, qui permet de caractériser ce que nous appelons l'équivalence s-universelle, les notions de s-restriction et de restriction s-logique ; cette dernière est (dans le cas d'une signature finie) la restriction logique vis-à-vis de Λ_s mais ne donne pas l'équivalence logique vis-à-vis de Λ_s , puisque Λ_s n'est pas clos pour la négation.

2.1 - Le langage élémentaire Λ de signature μ

Etant donnée la signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$, l'alphabet A du langage Λ de signature μ -il sera parfois utile de préciser $\Lambda(\mu)$ - comprend les symboles suivants :

- 1° - Le prédicat du vrai $\top$ à 0 place (ou constante propositionnelle du vrai), le prédicat d'égalité $\approx$ à 2 places et la famille $(\rho_\gamma)_{\gamma < \delta}$ des prédicats, chaque ρ_γ ayant m_γ places ;
- 2° - La famille $(v_k)_{k < \omega}$ des variables ;
- 3° - Les connecteurs usuels $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ et les familles

$$\begin{aligned} & (\forall_{k_0, \dots, k_{p-1}}) (k_i)_{i < p} \in \mathcal{M}(N) - \{\emptyset\} \\ \text{et} \quad & (\exists_{k_0, \dots, k_{p-1}}) (k_i)_{i < p} \in \mathcal{M}(N) - \{\emptyset\} \end{aligned}$$

de quantificateurs respectivement universels et existentiels.

Définissons par récurrence sur n les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}(A)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{\top\} \cup \{\approx v_i v_j / i < \omega \text{ et } j < \omega\} \\ &\cup \bigcup_{\gamma < \delta} \{\rho_\gamma v_{i_1} \dots v_{i_{m_\gamma}} / i_1 < \omega \text{ et } \dots \text{ et } i_{m_\gamma} < \omega\} , \\ \Lambda_{n+1} &= \Lambda_n \cup \{\neg \varphi / \varphi \in \Lambda_n\} \\ &\cup \{\Box \varphi \psi / \Box \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \text{ et } \varphi \in \Lambda_n \text{ et } \psi \in \Lambda_n\} \\ &\cup \bigcup_{0 < p < \omega} \{ \forall_{k_0, \dots, k_{p-1}} \varphi / (k_i)_{i < p} \in N^p \text{ et } \varphi \in \Lambda_n \} \\ &\cup \bigcup_{0 < p < \omega} \{ \exists_{k_0, \dots, k_{p-1}} \varphi / (k_i)_{i < p} \in N^p \text{ et } \varphi \in \Lambda_n \} . \end{aligned}$$

On pose :

$$\Lambda = \bigcup_{n < \omega} \Lambda_n .$$

Un élément φ de $\mathcal{M}(A)$ est une formule lorsqu'il existe $n < \omega$, tel que $\varphi \in \Lambda_n$, on dit que le plus petit de ces entiers est la hauteur (ou complexité) de φ .

Nous adopterons, par souci de commodité, la notation parenthésée des formules : par exemple, $(\varphi) \wedge (\psi)$ désignera la formule $\wedge \varphi \psi$.

On définit par récurrence sur la hauteur l'ensemble $VL(\varphi)$ des variables ayant des occurrences libres dans φ :

si $\varphi \in \Lambda_0$, $VL(\varphi) = \text{cod } \varphi \cap \{v_k/k < \omega\}$;

$VL(\neg \varphi) = VL(\varphi)$;

$VL(\Box \varphi \psi) = VL(\varphi) \cup VL(\psi)$, pour $\Box \in \{V, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$;

$VL(\forall_{k_0, \dots, k_{p-1}} \varphi) = VL(\exists_{k_0, \dots, k_{p-1}} \varphi) = VL(\varphi) - \{v_{k_i}/i < p\}$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$\Lambda^{(m)} = \{\varphi \in \Lambda / VL(\varphi) \subseteq \{v_k/k < m\}\}$;

$\Lambda^{(0)}$ est donc l'ensemble des énoncés (ou formules liées) du langage, $\top$ étant le seul énoncé sans quantificateur $\in \Lambda_0$.

Etant données la multirelation M de signature μ et la suite $a \in |M|^m$, on définit de la façon usuelle (c'est-à-dire par récurrence sur la hauteur) la notion de **satisfaction** : si $\varphi \in \Lambda^{(m)}$, $(M, a) \models \varphi$ (lire : " a satisfait φ dans M ") ; si $\varphi \in \Lambda^{(0)}$, $M \models \varphi$ (lire : " φ est satisfait dans M " ou " M est modèle de φ ").

De même, $\varphi \models \psi$ (lire " ψ se déduit de φ ") et $\varphi \equiv \psi$ (lire " φ et ψ sont équidéduites") ont la signification habituelle.

2.1.1 - Combinaison booléenne positive de formules

Etant donné un sous-ensemble Φ de Λ , on dit que φ est une disjonction [resp. conjonction] de formules de Φ lorsque φ est de la forme $(\dots(\varphi_0 \vee \varphi_1) \vee \dots) \vee \varphi_{n-1}$ [resp. $(\dots(\varphi_0 \wedge \varphi_1) \wedge \dots) \wedge \varphi_{n-1}$], où pour tout $i < n$, $\varphi_i \in \Phi$, ce qu'on note :

$$\varphi = \bigvee_{i < n} \varphi_i \text{ [resp. } \bigwedge_{i < n} \varphi_i \text{]};$$

plus généralement, étant donnée une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ de formules indexées par un ensemble I fini, on considèrera $\bigvee_{i \in I} \varphi_i$ [resp. $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$], et on posera $\bigvee_{i \in I} \varphi_i = \top$ [resp. $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i = \top$] si I est vide.

Pour les mêmes données, on dit que φ est une combinaison booléenne positive de formules de Φ lorsque φ est de la forme $(\dots(\varphi_0 \square_0 \varphi_1) \square_1 \dots) \square_{n-1} \varphi_{n-1}$, avec pour tout $i < n$, $\square_i \in \{\vee, \wedge\}$; il est bien connu que φ est équidéduite d'une formule disjonctive, de la forme $\bigvee_{i \in I} (\bigwedge_{j \in J_i} \varphi_{i,j})$, et d'une formule conjonctive, de la forme $\bigwedge_{j \in J} (\bigvee_{i \in I_j} \varphi_{i,j})$.

PROPOSITION - Etant donnés les multirelations M et M' de signature μ , l'entier m et les suites $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, si Φ est un sous-ensemble de $\Lambda^{(m)}$ tel que, pour toute formule φ de Φ , la condition suivante soit satisfaite :

$$(M, a) \models \varphi \text{ implique } (M', a') \models \varphi,$$

alors toute combinaison booléenne positive de formules de Φ satisfait cette condition.

Démonstration immédiate.

2.1.2 - Formule caractérisable

Etant donnée la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, on définit comme suit l'ensemble Λ_s des formules dites de caractéristique s , par récurrence sur la longueur de s ;

(i) Λ_ϕ est l'ensemble des formules sans quantificateur (ou formules libres), c'est-à-dire que :

$$\Lambda_\phi = \Lambda_0 \cup \{\neg \varphi / \varphi \in \Lambda_0\} \cup \{\Box \varphi \psi / \Box \in \{\forall, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \text{ et } \varphi \in \Lambda_0 \text{ et } \psi \in \Lambda_0\} ;$$

(ii) la formule φ appartient à $\Lambda_{s \smallfrown \langle p, n \rangle}$, pour n et $p \in N$, lorsque φ est une combinaison booléenne positive de formules de la forme

$$\exists_{k_0, \dots, k_{n-1}} \forall_{l_0, \dots, l_{p-1}} \psi,$$

où $\psi \in \Lambda_s$.

On dira qu'une formule φ est caractérisable lorsqu'il existe une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ telle que $\varphi \in \Lambda_s$.

On posera :

$$\Lambda_s^{(m)} = \Lambda_s \cap \Lambda^{(m)},$$

en précisant le cas échéant $\Lambda_s^{(m)}(\mu)$.

Remarque - Il revient au même d'exprimer la condition (ii) de la manière suivante :

$\varphi \in \Lambda_{s \smallfrown \langle p, n \rangle}$ lorsque φ est une conjonction de formules de la forme

$$\exists_{k_0, \dots, k_{n-1}} \theta, \text{ où } \theta \text{ est une disjonction de formules de la forme } \forall_{l_0, \dots, l_{p-1}} \psi,$$

la formule ψ appartenant à Λ_s .

PROPOSITION 1 - Etant données la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et la formule φ , si φ appartient à Λ_s , alors $\neg \varphi$ est équidéduite d'une formule de Λ_{s-1} .

En effet, la formule $\neg \bigwedge_{i \in I} (\exists_{k_0, \dots, k_{n-1}} (\bigvee_{j \in J_i} (\forall_{l_0, \dots, l_{p-1}} \psi_{i,j})))$
est équidéduite de la formule $\bigvee_{i \in I} (\forall_{k_0, \dots, k_{n-1}} (\bigwedge_{j \in J_i} (\exists_{l_0, \dots, l_{p-1}} \neg \psi_{i,j})))$.

PROPOSITION 2 - Pour toute formule de Λ , il existe une formule caractérisable
qui en est équidéduite ; donc, $\Lambda = \bigcup_{s \in \mathcal{M}(N^2)} \Lambda_s$ à l'équidédution près ; toute
formule prénexe est caractérisable.

Il suffit en effet de procéder à des quantifications de variables inefficaces
pour se ramener à une formule caractérisable, mais cela n'est pas nécessaire
pour les formules prénexes.

Exemples : ρ étant un prédicat binaire, la formule

$$\forall_{3,4} (\exists_2 (\rho v_1 v_3 \wedge \asymp v_4 v_2) \wedge \exists_5 \rho v_5 v_1) \vee \forall_{5,4} (\exists_3 \rho v_3 v_4 \wedge \exists_2 \rho v_5 v_2)$$

est de caractéristique $\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle$ et appartient à $\Lambda_{\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle}^{(2)}$;

la formule prénexe $\forall_{4,3} \exists_2 (\rho v_4 v_3 \wedge \rho v_0 v_2)$ est également de caractéristique

$\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle$ et appartient à $\Lambda_{\langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle}^{(1)}$; la formule

$\forall_0 (\exists_1 \rho v_0 v_1 \wedge \exists_1 \rho v_1 v_0)$ est de caractéristique $\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle$, mais sa

forme prénexe $\forall_0 \exists_{1,2} (\rho v_0 v_1 \wedge \rho v_2 v_0)$ est de caractéristique $\langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 0 \rangle$.

Remarque - On aurait pu tout aussi bien définir $\Lambda_{s, \langle p, n \rangle}$ comme l'ensemble
des combinaisons booléennes positives des formules de la forme

$$\exists_{k_0, \dots, k_{n'-1}} \forall_{l_0, \dots, l_{p'-1}} \psi, \text{ où } n' \leq n, p' \leq p \text{ et } \psi \in \Lambda_s, \text{ de sorte que}$$

toute formule aurait été caractérisable ; ainsi, la formule

$\forall_0 \exists_1 \rho v_0 v_1 \wedge \forall_{0,1,2} ((\rho v_0 v_1 \wedge \rho v_0 v_2) \Rightarrow \asymp v_1 v_2)$ aurait été de caractéristique
 $\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle$, alors qu'elle est seulement équidéduite de la formule

$\forall_{0,1,2} (\exists_3 \rho v_0 v_3 \wedge \exists_3 ((\rho v_0 v_1 \wedge \rho v_0 v_2) \Rightarrow \asymp v_1 v_2))$, de caractéristique
 $\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle$.

PROPOSITION 3 - Etant donnés l et $m \in \mathbb{N}$, pour toute suite $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < l}$ et pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, il existe une suite $s' = (\langle p'_i, n'_i \rangle)_{i < l}$ et une formule prénexe $\varphi' \in \Lambda_{s'}^{(m)}$ telles que $\varphi' \models \varphi$ et, pour tout $i < l$, $p'_i \geq p_i$ et $n'_i \geq n_i$.

Démonstration immédiate.

PROPOSITION 4 - Etant donnés la suite $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, les multirelations M et M' de signature μ et le s -ludion f de M vers M' , pour tous $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$ tels que f prolonge $a' \circ a^{-1}$ et pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a') \models \varphi$; dans le cas particulier où $m = 0$, pour tout énoncé φ de Λ_s , si $M \models \varphi$, alors $M' \models \varphi$.

Démonstration par récurrence sur la longueur de s : si s est la suite vide, alors f est un isomorphisme partiel, φ est une formule sans quantificateur et $(M, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M', a') \models \varphi$. Supposons que f est un $s_1(\langle p, n \rangle)$ -ludion de M vers M' et que $(M, a) \models \varphi$, avec

$\varphi = \exists_{m, \dots, m+n-1} \forall_{m+n, \dots, m+n+p-1} \psi$ et $\psi \in \Lambda_s^{(m+n+p)}$; alors il existe $b \in |M|^n$ tel que $(M, a \smallfrown b) \models \forall_{m+n, \dots, m+n+p-1} \psi$, mais $a' \circ a^{-1}$ est un $(s_1(\langle p, n \rangle))$ -ludion de M vers M' , donc à b on peut associer $b' \in |M'|^n$ vérifiant la condition : à tout $c' \in |M'|^p$ correspond $c \in |M|^p$ tel que $(a' \smallfrown b' \smallfrown c') \circ (a \smallfrown b \smallfrown c)^{-1}$ est un s -ludion de M vers M' ; or $(M, a \smallfrown b \smallfrown c) \models \psi$, donc, par l'hypothèse de récurrence, $(M', a' \smallfrown b' \smallfrown c') \models \psi$, de sorte que $(M', a') \models \varphi$; on achève la démonstration en considérant une combinaison booléenne positive de formules de la forme φ et en tenant compte de la proposition 2.1.1. CQFD.

Dans les deux paragraphes suivants, nous verrons dans quelles conditions la proposition 4 admet une réciproque.

2.2 - Les théorèmes de caractérisation pour une signature finie

Soient $d \in \mathbb{N}$ et la signature $\mu = (m_h)_h < d$.

THEOREME 1 - Etant données la multirelation M de signature μ et la suite $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in |M|^m$, il existe une formule $\chi_s^{(M, a)} \in \Lambda_s^{(m)}$ telle que, pour toute multirelation M' de signature μ et pour toute suite $a' \in |M'|^m$, $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M vers M' si, et seulement si, $(M', a') \models \chi_s^{(M, a)}$; de plus, l'ensemble des $\chi_s^{(M, a)}$ est fini, à l'équidéduction près, quand a parcourt $|M|^m$. Dans le cas particulier où $m = 0$, il existe un énoncé $\chi_s^M \in \Lambda_s$ tel que toute multirelation M' de signature μ est modèle de χ_s^M si, et seulement si, il existe un s-ludion de M vers M' .

Remarque - En prenant $M' = M$ et $a' = a$, il vient : $(M, a) \models \chi_s^{(M, a)}$.

Démonstration par récurrence sur la longueur de s : $\chi_\emptyset^{(M, a)}$ est la formule sans quantificateur qui décrit $M \upharpoonright \text{Cod } a$, c'est-à-dire, pour $a = (a_i)_{i < m}$, la conjonction des formules

- $\bigwedge v_i v_j$ [resp. $\bigwedge v_i v_j$], pour tous i et j tels que $a_i = a_j$ [resp. $a_i \neq a_j$] et $i < j < m$,

- $\rho_h v_{k_1} \dots v_{k_{m_h}}$ [resp. $\neg \rho_h v_{k_1} \dots v_{k_{m_h}}$], pour tout $h < d$ et pour tous $k_1, \dots, k_{m_h} < m$ tels que $R_h(a_{k_1}, \dots, a_{k_{m_h}}) = +$ [resp. $R_h(a_{k_1}, \dots, a_{k_{m_h}}) = -$]; il est clair que l'ensemble des $\chi_\emptyset^{(M, a)}$ est fini, à l'équidéduction près, quand a parcourt $|M|^m$. Dans le cas particulier où $m = 0$, $\chi_\emptyset^M$ est la conjonction des formules ρ_h [resp. $\neg \rho_h$] pour tout $h < d$ tel que $m_h = 0$ et $R_h = +$ [resp. $R_h = -$], ou se réduit à $\top$ s'il n'existe pas de telles formules.

Supposons que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in |M|^r$ il existe une formule

$\chi_s^{(m, x)} \in \Lambda_s^{(r)}$ vérifiant la condition de l'énoncé et, en outre, que

$\{ \chi_s^{(M, x)} / x \in |M|^r \}$ est fini, à l'équidéduction près. Soient n et $p \in \mathbb{N}$;

les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $a' \circ a^{-1}$ est un $(s_{<p, n>})$ -ludion de M vers M' ;
- (2) pour tout $b \in |M|^n$, il existe $b' \in |M'|^n$ tel que, pour tout $c' \in |M'|^p$, il existe $c \in |M|^p$ vérifiant : $(a' \circ b' \circ c') \circ (a \circ b \circ c)^{-1}$ est un s -ludion de M vers M' ;
- (3) pour tout $b \in |M|^n$, il existe $b' \in |M'|^n$ tel que, pour tout $c' \in |M'|^p$, il existe $c \in |M|^p$ vérifiant : $(M', a' \circ b' \circ c') \models \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)}$ (d'après l'hypothèse de récurrence).

$\{ \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)} / c \in |M|^p \}$ étant fini, à l'équidéduction près, choisissons une représentante dans chaque classe d'équidéduction et prenons la disjonction de ces formules, que nous noterons $\bigvee_{c \in |M|^p} \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)}$; dire qu'il existe $c \in |M|^p$ tel que $(M', a' \circ b' \circ c') \models \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)}$ signifie donc que $(M', a' \circ b' \circ c') \models \bigvee_{c \in |M|^p} \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)}$, ou que $(M', a' \circ b') \models \chi_s^{(M, a \circ b)}$ dans le cas particulier où $m = 0$.

Les conditions précédentes équivalent à la suivante :

- (4) pour tout $b \in |M|^n$,

$$(M', a') \models \exists_{m, \dots, m+n-1} \forall_{m+n, \dots, m+n+p-1} \bigvee_{c \in |M|^p} \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)} ;$$

ces formules appartiennent à $\Lambda_s^{(m)}(<p, n>)$ et sont en nombre fini, puisque $\{ \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)} / b \in |M|^n \text{ et } c \in |M|^p \}$ est fini, à l'équidéduction près ; on prendra cette fois la conjonction de leurs représentantes

lorsque b parcourt $|M|^n$ de façon que la condition (4) équivaille à :

$$(5) (M', a') \models \bigwedge_{b \in |M|^n} \exists_{m, \dots, m+n-1} \forall_{m+n, \dots, m+n+p-1} \bigvee_{c \in |M|^p} \chi_s^{(M, a \circ b \circ c)}$$

cette dernière formule appartient à $\Lambda_{s_{<p, n>}}^{(m)}$ et on pose que la formule $\chi_{s_{<p, n>}}^{(M, a)}$ lui est égale.

$\{ \chi_s^{(M, a, b, c)} / a \in |M|^m \text{ et } b \in |M|^n \text{ et } c \in |M|^p \}$ étant fini, à l'équidédution près, $\{ \chi_{s \cup \{ < p, n > \}}^{(M, a)} / a \in |M|^m \}$ est également fini, à l'équidédution près. CQFD.

THEOREME 2 - Etant données la multirelation M de signature μ et la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, pour tout $m \in N$ et pour tout $a \in |M|^n$, il existe une formule $\chi_{s-1}^{(M, a)} \in \Lambda_{s-1}^{(m)}$ telle que, pour toute multirelation M' de signature μ et, pour toute suite $a' \in |M'|^m$, $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M si, et seulement si, $(M', a') \models \chi_{s-1}^{(M, a)}$; de plus, l'ensemble des $\chi_{s-1}^{(M, a)}$ est fini, à l'équidédution près, quand a parcourt $|M|^m$. Dans le cas particulier où $m = 0$, il existe un énoncé $\chi_{s-1}^M \in \Lambda_{s-1}$ tel que toute multirelation M' de signature μ est modèle de χ_{s-1}^M si, et seulement si, il existe un s-ludion de M' vers M.

La démonstration est analogue à la précédente, en échangeant M et M', de sorte que l'on pose :

$$\chi_{s \cup \{ < p, n > \}}^{(M, a)}{}^{-1} = \bigvee_{m, \dots, m+n-1} \bigvee_{b \in |M|^n} \bigwedge_{c \in |M|^p} \exists_{m+n, \dots, m+n+p-1} \chi_{s-1}^{(M, a, b, c)}$$

THEOREME 3 - Etant données les multirelations M et M' de signature μ et la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, pour tous $m \in N$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M vers M' si et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a') \models \varphi$; dans le cas particulier où $m = 0$, il existe un s-ludion de M vers M' si, et seulement si, tout énoncé $\varphi \in \Lambda_s$ admet M' pour modèle dès que M est modèle de φ .

Démonstration : que la condition soit nécessaire résulte de la proposition 4 de 2.1.2 ; inversement, d'après le théorème 1, $(M', a') \models \chi_s^{(M, a)}$, donc $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M vers M'.

COROLLAIRE - Etant données les multirelations M et M' de signature μ et la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, pour tous $m \in N$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, $(M, a) \approx (M', a')$ si et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, $(M, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M', a') \models \varphi$; dans le cas particulier où $m = 0$, dire que $M \approx M'$ équivaut à la condition suivante : pour tout énoncé $\varphi \in \Lambda_s$, $M \models \varphi$ si, et seulement si, $M' \models \varphi$.

PROPOSITION - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et $m \in N$, l'ensemble de formules $\Lambda_s^{(m)}$ est fini, à l'équidéduction près.

Démonstration : l'ensemble $\mathcal{M}$ des représentants des classes d'équivalence des systèmes relationnels de signature (μ, m) suivant $\approx$ est fini d'après la proposition 1.4.1 ; chaque représentante φ d'un élément de $\Lambda_s^{(m)} / \equiv$ peut être caractérisée, d'après le corollaire précédent, par le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des systèmes (M, a) tels que $(M, a) \models \varphi$; $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ étant fini, il en est de même de $\Lambda_s^{(m)} / \equiv$.

2.3 - Les théorèmes de caractérisation pour une signature quelconque

Les résultats précédents ne s'étendent pas immédiatement au cas des multirelations dont la signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$ n'est pas finie. Soit, par exemple, la multirelation $M = (R_\gamma)_{\gamma < \delta}$ ^{unaire} sur $\{0\}$, où $R_\gamma(0) = +$ pour tout $\gamma < \delta$; quel que soit l'élément φ de $\Lambda^{(0)}(<0, 1>)$, satisfait dans M , considérons $M' = (R'_\gamma)_{\gamma < \delta}$ sur $\{0\}$, où, pour chaque $\gamma < \delta$, $R'_\gamma(0) = -$ lorsque ρ_γ n'a aucune occurrence dans φ : il est clair que $M \not\models \varphi$, mais il n'existe pas de $(<0, 1>)$ -ludion de M vers M' .

La méthode introduite par A. TARSKI [30] permet cependant d'énoncer un théorème analogue au théorème 3 de 2.2.1.

Etant donnés la signature $\mu = (m_\gamma)_{\gamma < \delta}$, l'ordinal $\eta \leq \delta$ et h une application strictement croissante de η dans δ , soit $\nu = (m_h)_{\gamma < \eta}$ une signature extraite de μ . Le langage $\Lambda(\nu)$ extrait de $\Lambda(\mu)$ sera le langage de signature ν dont la famille des prédicats est $(\rho_h)_{\gamma < \eta}$: on dit que $\Lambda(\nu)$ est un "appauvrissement" du langage $\Lambda(\mu)$.

LEMME - Etant donnés la multirelation M de signature μ , l'entier m , $a \in |M|^m$, la formule $\varphi \in \Lambda^{(m)}(\mu)$ et la signature finie ν extraite de μ , si $\varphi \in \Lambda(\nu)$, alors dire que $(M, a) \models \varphi$ équivaut à dire que $(M_\nu, a) \models \varphi$.

THEOREME - Etant données les multirelations M et M' de signature μ et la suite $s \in \mathcal{MC}(\mathbb{N}^2)$, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, $a' \circ a^{-1}$ est un s -ludion de M_ν vers M'_ν pour chaque signature finie ν extraite de μ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée: pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}(\mu)$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a') \models \varphi$; dans le cas particulier où $m = 0$, il existe un s -ludion de M_ν vers M'_ν pour chaque signature finie ν extraite de μ , si, et seulement si, tout énoncé $\varphi \in \Lambda_s(\mu)$ admet M' pour modèle dès que M est modèle de φ .

Démonstration : si la condition est satisfaite, alors, quelle que soit la signature finie ν extraite de μ , on a, d'après le lemme : pour toute formule $\varphi \in \Lambda_S^{(m)}(\nu)$, si $(M_\nu, a) \models \varphi$, alors $(M'_\nu, a') \models \varphi$, donc, d'après le théorème 3 de 2.2, $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M_ν vers M'_ν ; inversement, pour toute formule $\varphi \in \Lambda_S^{(m)}(\mu)$, il existe une signature finie ν extraite de μ telle que $\varphi \in \Lambda_S^{(m)}(\nu)$, donc, toujours d'après le théorème 3 de 2.2, $(M_\nu, a) \models \varphi$ implique que $(M'_\nu, a') \models \varphi$, et on conclut à l'aide du lemme.

COROLLAIRE - Etant données les multirelations M et M' de signature μ et la suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, pour tous $m \in N$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, $(M_\nu, a) \stackrel{s}{\sim} (M'_\nu, a')$ pour chaque signature finie ν extraite de μ , si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour toute formule $\varphi \in \Lambda_S^{(m)}(\mu)$, $(M, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M', a') \models \varphi$; dans le cas particulier où $m = 0$, dire que $M_\nu \stackrel{s}{\sim} M'_\nu$ quelle que soit la signature finie ν extraite de μ équivaut à la condition suivante : pour tout énoncé $\varphi \in \Lambda_S(\varphi)$, $M \models \varphi$ si, et seulement si, $M' \models \varphi$.

2.4 - L'équivalence s-logique

Rappelons que, étant donnés les multirelations M et M' de signature μ , $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, les systèmes relationnels (M, a) et (M', a') sont dits logiquement (ou élémentairement) équivalents, ce qu'on note $(M, a) \equiv (M', a')$, lorsque, pour toute formule $\varphi \in \Lambda^{(m)}(\mu)$, $(M, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M', a') \models \varphi$; dans le cas particuliers où $m = 0$, $M \equiv M'$ signifie que M et M' sont modèles des mêmes énoncés.

Nous dirons que (M, a) et (M', a') sont s-logiquement équivalents, et nous noterons $(M, a) \stackrel{S}{\equiv} (M', a')$, lorsque, pour toute formule $\varphi \in \Lambda_S^{(m)}(\mu)$, $(M, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M', a') \models \varphi$; $M \stackrel{S}{\equiv} M'$ signifiera que M et M' sont modèles des mêmes énoncés appartenant à Λ_S .

2.4. 1 - Le corollaire de 2.3 s'exprime alors ainsi :

$(M, a) \stackrel{S}{\equiv} (M', a')$ [resp. $M \stackrel{S}{\equiv} M'$] si, et seulement si, pour chaque signature finie ν extraite de μ , $(M_\nu, a) \stackrel{S}{\sim} (M'_\nu, a')$ [resp. $M_\nu \sim M'_\nu$].

Donc, l'équivalence s-logique et la s-équivalence coïncident dans le cas où la signature μ est finie.

PROPOSITION - Etant donnés les multirelations M et M' de signature μ , $n \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^n$ et $a' \in |M'|^n$, $(M, a) \equiv (M', a')$ si, et seulement si, pour tout $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et pour toute signature finie ν extraite de μ , $(M_\nu, a) \stackrel{S}{\sim} (M'_\nu, a')$.

Cela résulte de la proposition 2 de 2.1.2 et de ce qui précède.

2.4.2 - On retrouve ainsi, à partir des corollaires des paragraphes 1.4.2, 1.4.3 et 1.4.5, le résultat bien connu:

L'équivalence logique sur les multirelations de même signature est compatible avec l'addition, la multiplication et la multiplication réduite des multirelations.

En particulier, d'après le corollaire de la proposition 2 de 1.5.2, on retrouve que les types de chaîne ω et $\omega + \omega^* + \omega$ sont logiquement équivalents.

D'une manière plus précise :

PROPOSITION - Etant donnés $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$, l'ensemble I , les familles $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ de multirelations et la multirelation N , toutes de signature μ , et la relation unaire S sur $\mathcal{P}(I)$, si, pour chaque $s \in \mathcal{G}$ et pour chaque $i \in I$, $M_i \stackrel{S}{=} M'_i$, alors, pour chaque $s \in \mathcal{G}$, la N -somme des M_i [resp. le S -produit des M_i ; $\prod_{i \in I} M_i / S$, si S est un filtre sur I] et la N -somme des M'_i [resp. le S -produit des M'_i ; $\prod_{i \in I} M'_i / S$] sont s -logiquement équivalentes.

COROLLAIRE - Etant donnés $l \in N$, l'ensemble I , les familles $(M_i)_{i \in I}$ et $(M'_i)_{i \in I}$ de multirelations et la multirelation N , toutes de signature μ , et la relation unaire S sur $\mathcal{P}(I)$, si, pour chaque $i \in I$, M_i et M'_i sont modèles des mêmes énoncés prénexes appartenant à $\bigcup_{s \in (N^2)^1} \Lambda_s$, alors la N -somme des M_i [resp. le S -produit des M_i] ; $\prod_{i \in I} M_i / S$, si S est un filtre sur I] et la N -somme des M'_i [resp. le S -produit des M'_i ; $\prod_{i \in I} M'_i / S$] sont modèles des mêmes énoncés prénexes de cette forme.

Il suffit de mettre chaque énoncé appartenant à $\bigcup_{s \in (N^2)^1} \Lambda_s$ sous forme prénexe et de tenir compte de la proposition 3 de 2.1.2.

2.4.3 - L'équivalence s -universelle

Etant donnés les multirelations M, M' de signature μ et $F \subseteq |M|$, nous dirons que $M \upharpoonright F$ est s -plongeable dans M' lorsqu'il existe un s -ludion f de M vers M' de domaine F ; f est dit un s -plongement de $M \upharpoonright F$ dans M' .

PROPOSITION - Etant données les multirelations M et M' de signature μ ,
 $p \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, $M \underset{s}{\prec} (< p, 0 >)$ M' si, et seulement si, pour chaque signature
finie ν extraite de μ , toute restriction de M_ν [resp. M'_ν] de cardinal $\leq p$ est
 s^{-1} -plongeable dans M'_ν [resp. M_ν].

C'est une conséquence immédiate du corollaire de 2.3.

Nous dirons qu'un énoncé φ est s -universel lorsqu'il existe un $p \in \mathbb{N}$ tel que
 $\varphi \in \Lambda_{\underset{s}{\prec}(< p, 0 >)}^{(0)}$.

COROLLAIRE - Etant donnés M et M' de signature μ et $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, M et M' sont
 s -universellement équivalents, c'est-à-dire sont modèles des mêmes énoncés
 s -universels, si, et seulement si, pour chaque signature finie ν extraite de μ ,
toute restriction finie de M_ν [resp. M'_ν] est s^{-1} -plongeable dans M'_ν [resp. M_ν].

On retrouve en particulier, pour $s = \phi$, que M et M' sont universellement
 équivalents si, et seulement si, pour chaque signature finie ν extraite de μ ,
 M_ν et M'_ν ont les mêmes restrictions finies, à l'isomorphie près [30].

2.4.4 - La s -restriction et la restriction s -logique

Nous dirons qu'une restriction M de M' est une s -restriction de M' lorsque,
 pour toute partie finie F de $|M|$, $M \upharpoonright F$ est s -plongeable dans M' , autrement dit,
 lorsque, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un $(\underset{s}{\prec}(< 0, p >))$ -ludion de M vers M' ;
 M est une restriction s -logique de M' lorsque l'identité sur toute partie finie
 F de $|M|$ est un s -plongement de $M \upharpoonright F$ dans M' .

Toute restriction s -logique de M' est une s -restriction de M' . Inversement,
 l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ est une $(< 0, 1 >)$ -restriction de l'ordre naturel sur
 $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ mais n'en est pas une restriction $(< 0, 1 >)$ -logique ; cependant, toute
 ϕ -restriction de M' est une restriction ϕ -logique de M' : c'est tout simplement
 une restriction de M' .

Notation - $M \leq_s M'$ signifie que M est isomorphe à une s -restriction de M' ; R. FRAÏSSÉ note $\leq$ ce que nous notons $\leq_\emptyset$ [13].

Rappelons que, suivant J. R. SHOENFIELD [28], une restriction M de M' est dite une Γ -restriction de M' lorsque $\Gamma \subseteq \Lambda$ et que, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $\varphi \in \Gamma$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a) \models \varphi$; M est une restriction logique de M' lorsque M est une Λ -restriction de M' . Nous noterons : $M \leq_s M'$ [resp. $M \leq M'$] lorsque M est une Λ_s -restriction [resp. Λ -restriction] de M' .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 2.3.

PROPOSITION - Etant données les multirelations M et M' de signature μ telles que M est une restriction de M' , $M \leq_s M'$ [resp. $M \leq M'$] si, et seulement si, pour toute signature fixe ν extraite de μ , M_ν est une restriction s -logique [resp. restriction s -logique pour chaque $s \in \mathcal{M}(N^2)$] de M'_ν .

Les notions de restriction s -logique et de Λ_s -restriction coïncident donc dans le cas où la signature μ est finie.

COROLLAIRE - Avec les mêmes hypothèses, $M \leq_s M'$ et $M \leq_{s^{-1}} M'$ [resp. $M \leq M'$] si, et seulement si, pour toute signature finie ν extraite de μ , pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $a \in |M|^m$, $(M_\nu, a) \stackrel{s}{\sim} (M'_\nu, a)$ [resp. $(M_\nu, a) \stackrel{s}{\sim} (M'_\nu, a)$ pour chaque $s \in \mathcal{M}(N^2)$].

Exemple : pour chaque $s \in \mathcal{M}(N^2)$, l'identité sur toute partie finie de ω est, d'après le théorème 1.5.2, un s -ludion et un s^{-1} -ludion de ω vers $\omega + \omega^* + \omega$, donc ω est une Λ_s -restriction et une $\Lambda_{s^{-1}}$ -restriction de $\omega + \omega^* + \omega$; on retrouve ainsi que ω est une restriction logique de $\omega + \omega^* + \omega$.

CHAPITRE 3 - Les classes s-logiques

Introduction

La notion de classe logique (ou classe élémentaire) a été introduite par A. TARSKI [29] : nous la concevons ici dans son sens le plus large comme classe de systèmes relationnels de même signature, modèles (par abus de langage) d'une même formule ; on connaît des théorèmes caractérisant algébriquement certaines classes logiques particulières [30],[33],[10],[6]. Le premier paragraphe donne une caractérisation générale, par les s-ludions, de toute classe logique, avec quelques cas particuliers et exemples. Dans le deuxième paragraphe, une condition plus forte que la précédente fournit une seconde caractérisation, valable seulement dans le cas de combinaisons booléennes de formules commençant par un quantificateur universel, ce qui permet de retrouver ou de préciser les résultats mentionnés ci-dessus. Les langages considérés ici sont de signature finie, mais les modifications nécessaires dans le cas d'une signature infinie sont indiquées dans le dernier paragraphe.

3.1 - Définition et caractérisation sémantique des classes s-logiques

Etant donnés une signature μ finie, $m \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, une classe $\mathcal{K}$ de multirelations [resp. systèmes relationnels] de signature μ [resp. (μ, m)] sera dite une classe s-logique lorsqu'il existe une formule $\varphi \in \Lambda_s^{(0)}$ [resp. $\Lambda_s^{(m)}$] telle que $\mathcal{K}$ est la classe des modèles de φ [resp. des systèmes relationnels (M, a) de signature (μ, m) tels que $(M, a) \models \varphi$, c'est-à-dire par abus de langage, des modèles (M, a) de φ] ; nous noterons : $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$.

Exemple - La classe des relations binaires fonctionnelles totales est la classe des modèles de l'énoncé $\forall_{0,1,2} (\exists_3 \rho v_0 v_3 \wedge \exists_3 ((\rho v_0 v_1 \wedge \rho v_0 v_2) \Rightarrow \neg v_1 v_2))$, donc est $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -logique.

3.1.1 - Le nombre des classes s-logiques de systèmes relationnels de signature donnée est fini, d'après la proposition 2.2.

Toute réunion ou intersection (évidemment finie) de classes s-logiques est une classe s-logique, par définition de Λ_s .

La classe, complémentaire d'une classe s-logique (dans la classe des multirelations de même signature) est s^{-1} -logique, d'après la proposition 1 de 2.1.2.

Toute classe s-logique est s^1 -logique pour toute suite $s^1 \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ dont s est extraite.

3.1.2 - THEOREME - Une classe $\mathcal{K}$ de multirelations [resp. systèmes relationnels] de signature μ [resp. (μ, m)] est s-logique si, et seulement si, pour toute multirelation M [resp. tout système relationnel (M, a)] de signature μ [resp. (μ, m)], la condition suivante est vérifiée : pour tout M' [resp. (M', a')] $\in \mathcal{K}$ s'il existe [resp. si $a \circ a'^{-1}$ est] un s-ludion de M' vers M , alors M [resp. (M, a)] $\in \mathcal{K}$.

Démonstration : soient $\varphi \in \Lambda_S^{(m)}$, (M, a) et (M', a') tels que $(M', a') \models \varphi$; si $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M , alors, d'après le théorème 3 de 2.2, $(M, a) \models \varphi$.

Inversement, d'après la proposition 2.2, $\{x_S^{(M, a)} / (M, a) \in \mathcal{K}\}$ est fini, à l'équidéduction près ; posons $\varphi = \bigvee_{(M, a) \in \mathcal{K}^{x_S^{(M, a)}}} x_S^{(M, a)}$ et $\mathcal{K}' = \text{Mod } \varphi$. Quel que soit (M, a) , si $(M, a) \in \mathcal{K}$, alors $(M, a) \models \varphi$, donc $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$; si $(M, a) \in \mathcal{K}'$, alors il existe $(M', a') \in \mathcal{K}$ tel que $(M, a) \models_{x_S^{(M', a')}} \varphi$ et, d'après le théorème 1 de 2.2, $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M , donc, d'après l'hypothèse, $(M, a) \in \mathcal{K}$: $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Par conséquent, $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est s-logique. CQFD

3.1.3 - Classes s-logiques particulières

- On déduit immédiatement de ce théorème que, étant donnée une relation binaire R
 - s'il existe une chaîne R' et un $(< 0, 3 >)$ -ludion de R vers R' , alors R est une chaîne ;
 - s'il existe une relation binaire fonctionnelle totale R' et un $(< 1, 3 >)$ -ludion de R vers R' , alors R est fonctionnelle totale.

Le résultat suivant renforce le théorème de R. L. VAUGHT [33].

Une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ est universelle, c'est-à-dire est la classe des modèles d'un énoncé prénexe universel, si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{K}$ est une classe $(< p, 0 >)$ -logique, autrement dit si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute multirelation M de signature μ et pour toute $M' \in \mathcal{K}$, la condition suivante est vérifiée : si toute restriction de M de cardinal $\leq p$ est plongeable dans M' , alors $M \in \mathcal{K}$. En fait, $\mathcal{K}$ est la classe des modèles d'une disjonction d'énoncés universels prénexes dont chaque préfixe est de longueur p .

Le théorème suivant est dual du précédent:

Une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ est existentielle si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute multirelation M de signature μ et pour toute $M' \in \mathcal{K}$, la condition suivante est vérifiée : si toute restriction de M' de cardinal $\leq p$ est plongeable dans M , alors $M \in \mathcal{K}$.

Dans les mêmes conditions, nous avons :

$\mathcal{K}$ est une classe $(\langle p, n \rangle)$ -logique si, et seulement si, pour toute multirelation M de signature μ et pour toute $M' \in \mathcal{K}$, la condition suivante est vérifiée : si, pour tout $a' \in |M'|^n$, il existe $a \in |M|^n$ tel que $a' \circ a^{-1}$ est prolongeable à toute partie de $|M|$ de cardinal $\leq p$ en un isomorphisme partiel de M vers M' , alors $M \in \mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ est une classe $(\langle 0, n \rangle, \langle p, 0 \rangle)$ -logique si, et seulement si, pour toute multirelation M de signature μ et pour toute $M' \in \mathcal{K}$, la condition suivante est vérifiée : si, pour tout $a \in |M|^p$, il existe $a' \in |M'|^p$ tel que $a \circ a'^{-1}$ est prolongeable à toute partie de $|M'|$ de cardinal $\leq n$ en un isomorphisme partiel de M' vers M , alors $M \in \mathcal{K}$.

Exemple - Un corps pouvant être conçu comme une multirelation (S, P, Z, U) de signature $(3, 3, 1, 1)$, où S (somme), P (produit), Z (zéro), et U (unité) sont fonctionnelles en leur dernier argument, la classe des corps est, par exemple, la classe des modèles de la conjonction des énoncés suivants dans le langage dont la famille de prédicats est $(\sigma, \pi, \zeta, \nu)$:

$$\begin{aligned} & (\forall_{0,1} \exists_2 \sigma_{0^1 1^2}) \wedge \forall_{0,1,2,3} ((\sigma_{0^1 1^2} \wedge \sigma_{0^1 1^3}) \Rightarrow \neg \nu_{2^3}), \\ & \forall_{0,1,2,3,4,5} ((\sigma_{0^1 1^2} \wedge \sigma_{2^3 3^4} \wedge \sigma_{1^3 3^5}) \Rightarrow \sigma_{0^5 5^4}), \\ & \forall_{0,1,2} (\sigma_{0^1 1^2} \Rightarrow \sigma_{1^0 0^2}), \end{aligned}$$

$$(\exists_0 \zeta v_0) \wedge \forall_{0,1} ((\zeta v_0 \wedge \zeta v_1) \Rightarrow \asymp v_0 v_1),$$

$$\forall_{0,1} (\zeta v_0 \Rightarrow (\sigma v_0 v_1 v_1 \wedge \exists_2 \sigma v_1 v_2 v_0)),$$

$$(\forall_{0,1} \exists_2 \pi v_0 v_1 v_2) \wedge \forall_{0,1,2,3} ((\pi v_0 v_1 v_2 \wedge \pi v_0 v_1 v_3) \Rightarrow \asymp v_2 v_3),$$

$$\forall_{0,1,2,3,4,5} ((\pi v_0 v_1 v_2 \wedge \pi v_2 v_3 v_4 \wedge \pi v_1 v_3 v_5) \Rightarrow \pi v_0 v_5 v_4),$$

$$\forall_{0,1,2,3,4,5,6} ((\sigma v_0 v_1 v_2 \wedge \pi v_3 v_2 v_4 \wedge \pi v_3 v_0 v_5 \wedge \pi v_3 v_1 v_5) \Rightarrow \sigma v_5 v_6 v_4),$$

$$\forall_{0,1,2,3,4,5,6} ((\sigma v_0 v_1 v_2 \wedge \pi v_2 v_3 v_4 \wedge \pi v_0 v_3 v_5 \wedge \pi v_1 v_3 v_6) \Rightarrow \sigma v_5 v_6 v_4),$$

$$\exists_0 (\upsilon v_0 \wedge \neg \zeta v_0) \wedge \forall_{0,1} ((\upsilon v_0 \wedge \upsilon v_1) \Rightarrow \asymp v_0 v_1),$$

$$\forall_{0,1} (\upsilon v_0 \Rightarrow (\pi v_0 v_1 v_1 \wedge \pi v_1 v_0 v_1)),$$

$$\forall_{0,1} ((\neg \zeta v_0 \wedge \upsilon v_1) \Rightarrow ((\exists_2 \pi v_0 v_2 v_1) \wedge \exists_2 \pi v_2 v_0 v_1));$$

on en déduit qu'une multirelation M de signature $(3, 3, 1, 1)$ est un corps [resp. un corps commutatif] s'il existe un corps [resp. un corps commutatif] M' vérifiant la condition suivante : à tout $a \in |M|^7$ correspond $a' \in |M'|^7$ tel que $a \circ a'^{-1}$ est prolongeable à tout élément de $|M'|$ en un isomorphisme partiel de M' vers M. Remarquons qu'un corps peut être également conçu comme une multirelation (S, P, Z) de signature $(3, 3, 1)$; le même résultat demeure, car il suffit de remplacer les trois derniers énoncés ci-dessus par les deux suivants :

$$\exists_0 \neg \zeta v_0,$$

$$\forall_{0,1} (\neg \zeta v_0 \Rightarrow ((\exists_2 \pi v_0 v_2 v_1) \wedge \exists_2 \pi v_2 v_0 v_1)).$$

3.1.4 - Etant donné la multirelation N de signature μ [resp. le système relationnel (N, b) de signature (μ, m)], la classe des multirelations M [resp. systèmes relationnels (M, a)] de signature μ [resp. (μ, m)] telles [resp. tels] qu'il n'existe pas de [resp. que $b \circ a^{-1}$ n'est pas un] s-ludion de M vers N est une classe s-logique.

En effet, d'après le théorème 2 de 2.2, $b \circ a^{-1}$ n'est pas un s-ludion de M vers N si, et seulement si, $(M, a) \models \neg \chi_{s-1}^{(N, b)}$; on conclut à l'aide de la proposition 1 de 2.1.2.

On retrouve comme cas particulier le résultat de A. TARSKI [30] : si N est une multirelation finie, alors la classe des multirelations de même signature dans lesquelles N n'est pas plongeable est universelle ; en effet, N n'est pas plongeable dans M si, et seulement si, il n'existe pas de $(\langle N, 0 \rangle)$ -ludion de M vers N.

COROLLAIRE - Etant donnée une famille finie $(N_i)_{i < h}$ de multirelations de signature μ , la classe $\mathfrak{J}$ des multirelations M de signature μ , telles que $M \in \mathfrak{J}$ si, et seulement si, pour tout [resp. pour au moins un] $i < h$ il n'existe pas de s-ludion de M vers N_i , est une classe s-logique.

En effet, $\mathfrak{J} = \text{Mod}(\bigvee_{i < h} \chi_{s-1}^{N_i})$ [resp. $\text{Mod}(\bigwedge_{i < h} \chi_{s-1}^{N_i})$].

3.1.5 - Dans les mêmes conditions qu'en 3.1.4, la classe des multirelations M [resp. systèmes relationnels (M, a)] de signature μ [resp. (μ, m)] telles [resp. tels] qu'il existe [resp. que $a \circ b^{-1}$ est] un s-ludion de N vers M est une classe s-logique.

C'est en effet la classe des modèles de $\chi_s^{(N, b)}$, d'après le théorème 1 de 2.2.

COROLLAIRE - Etant donnée une famille $(N_i)_{i < k}$ de multirelations de signature μ , la classe $\mathfrak{K}$ des multirelations M de signature μ , telles que $M \in \mathfrak{K}$ si, et seulement si, pour tout [resp. pour au moins un] $i < k$, il existe un s-ludion de N_i vers M, est une classe s-logique.

En effet, $\mathfrak{K} = \text{Mod}(\bigwedge_{i < k} \chi_s^{N_i})$ [resp. $\text{Mod}(\bigvee_{i < k} \chi_s^{N_i})$].

3.1.6 - Toute classe s-logique est réunion de classes de s-équivalence, en nombre évidemment fini (d'après la proposition 1.4.1).

En effet, notant $\dot{(M, a)}$ la classe de (M, a) suivant $\dot{\sim}$, soit $\mathcal{K}' = \bigcup_{(M, a) \in \mathcal{K}} \dot{(M, a)}$, il est clair que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$; inversement, si $(M', a') \in \mathcal{K}'$, alors il existe $(M, a) \in \mathcal{K}$ tel que $(M', a') \in \dot{(M, a)}$, donc $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M vers M' , de sorte que $(M', a') \in \mathcal{K}$, d'après le théorème 3.1.2, et $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.

Mais l'inverse est faux : il existe des classes de s-équivalence qui ne sont pas des classes s-logiques. Pour la signature vide, la classe des ensembles de cardinal 2 est une classe de $\langle \underline{3}, 0 \rangle$; c'est aussi la classe des modèles de l'énoncé $\exists_{0,1} (\neg \simeq_{v_0 v_1}) \wedge \forall_{0,1,2} (\simeq_{v_0 v_1} \vee \simeq_{v_0 v_2} \vee \simeq_{v_1 v_2})$ et on vérifie aisément que ce n'est pas une classe $\langle \underline{3}, 0 \rangle$ -logique.

Remarque - La classe de s-équivalence de (M, a) est l'intersection des classes s-logiques et s^{-1} -logiques qui comprennent (M, a) .

3.1.7 - Classe s-logique relativement à une classe quelconque

Etant données deux classes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ de multirelations [resp. systèmes relationnels] de signature μ [resp. (μ, m)], $\mathcal{K}'$ est dite une classe s-logique relativement à $\mathcal{K}$ [31] lorsqu'il existe une classe s-logique $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$, autrement dit lorsqu'il existe une formule φ telle que $\mathcal{K}'$ est la classe des M [resp. $(M, a) \in \mathcal{K}$] modèles de φ .

PROPOSITIONS - $\mathcal{K}'$ est une classe s-logique relativement à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

1° $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$;

2° pour toutes les multirelations [resp. pour tous les systèmes relationnels]

M [resp. $(M, a) \in \mathcal{K}$] et M' [resp. $(M', a') \in \mathcal{K}'$] s'il existe [resp. si $a \circ a'^{-1}$ est] un s-ludion de M' vers M , alors M [resp. $(M, a) \in \mathcal{K}$].

Démonstration : supposons qu'il existe une classe s-logique $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ et soient $(M, a) \in \mathcal{K}$ et $(M', a') \in \mathcal{K}'$; $(M', a') \in \mathcal{L}$, donc si $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M , alors $(M, a) \in \mathcal{L}$ d'après le théorème 3.1.2, de sorte que $(M, a) \in \mathcal{K}'$.

Inversement, soit la classe s-logique $\mathcal{L} = \text{Mod} \left(\bigvee_{(M', a') \in \mathcal{K}'_{\chi_s}} (M', a') \right)$; $\mathcal{K}' \in \mathcal{L}$,
 donc $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ d'après la première condition ; pour tout $(M, a) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$,
 il existe $(M', a') \in \mathcal{K}'$ tel que $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M d'après le
 théorème 1 de 2.2, donc $(M, a) \in \mathcal{K}$ d'après la seconde condition, et $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$. CQFD

Remarque - On retrouve l'énoncé du théorème 3.1.2 en prenant pour $\mathcal{K}$ la classe
 de toutes les multirelations [resp. tous les systèmes relationnels] de signature
 μ [resp. (μ, m)] .

3.2 - Caractérisation sémantique des classes $(s_{\prec}(< p, 0 >))$ -logiques.

3.2.1 - THEOREME - Etant donnés une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ , $p \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{WB}(\mathbb{N}^2)$, $\mathcal{K}$ est une $(s_{\prec}(< p, 0 >))$ -classe si, et seulement si, pour toute multirelation M de signature μ , la condition suivante est vérifiée : si, pour tout $F \subseteq |M|$ tel que $\bar{F} \leq p$, il existe $M' \in \mathcal{K}$ tel que $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M' , alors $M \in \mathcal{K}$.

Remarque - Ce résultat s'étend sans difficulté aux classes de systèmes relationnels de signature finie ; on retrouve alors le théorème 3.1.2 dans le cas particulier où $p = 0$.

Démonstration : soit la formule $\varphi \in \Lambda_{s_{\prec}(< p, 0 >)}^{(0)}$ telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$; il existe $h \in \mathbb{N}$ et une famille $(\psi_i)_{i < h}$ de formules de $\Lambda_s^{(p)}$ tels que $\varphi = \bigvee_{i < h} \bigwedge_{0 \leq j < p} \psi_i$. Soit M une multirelation vérifiant : pour tout $a \in |M|^p$, il existe $M' \in \mathcal{K}$ et $a' \in |M'|^p$ tels que $a \circ a'^{-1}$ est un s -ludion de M' vers M ; il existe donc un $i < h$ tel que $M' \models \bigwedge_{0 \leq j < p} \psi_i$, et par suite $(M', a') \models \psi_i$, donc $(M, a) \models \psi_i$ d'après le théorème 3 de 2.2, de sorte que $M \models \bigwedge_{0 \leq j < p} \psi_i$ et $M \in \mathcal{K}$.

Inversement, la condition énoncée ici implique la condition du théorème 3.1.2. exprimée avec $s_{\prec}(< p, 0 >)$. CQFD

3.2.2 - Classes $(s_{\prec}(< p, 0 >))$ -logiques particulières

On retrouve le résultat de R. L. VAUGHT [33] :

Une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ est universelle si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute multirelation M de signature μ , la condition suivante est vérifiée : si toute restriction de M de cardinal $\leq p$ est plongeable dans une multirelation de $\mathcal{K}$, alors $M \in \mathcal{K}$.

La proposition suivante précise un résultat de C. C. CHANG [6]

$\mathcal{K}$ est une classe $(\langle 0, n \rangle, \langle p, 0 \rangle)$ -logique si, et seulement si, pour toute multirelation M de signature μ , la condition suivante est vérifiée : si, pour tout $a \in |M|^p$, il existe $M' \in \mathcal{K}$ et $a' \in |M|^p$ tels que $a \circ a'^{-1}$ est prolongeable à toute partie de $|M'|$ de cardinal $\leq n$ en un isomorphisme partiel de M' vers M , alors $M \in \mathcal{K}$.

Reprenant l'exemple de 3.1.3, une multirelation M de signature $(3, 3, 1, 1)$ est un corps [resp. un corps commutatif] si, pour tout $a \in |M|^7$, il existe un corps [resp. un corps commutatif] M' et $a' \in |M'|^7$ tels que $a \circ a'^{-1}$ est prolongeable à tout élément de $|M'|$ en un isomorphisme partiel de M' vers M .

3.2.1 - Classe $(s(\langle p, 0 \rangle))$ -logique relativement à une classe quelconque.

De la même façon que pour la proposition 3.1.7, on peut démontrer que $\mathcal{K}'$ est une classe $(s(\langle p, 0 \rangle))$ -logique relativement à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

1° $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$;

2° pour toute multirelation $M \in \mathcal{K}$, si, pour tout $F \subseteq |M|$ tel que $\bar{F} \leq p$, il existe $M' \in \mathcal{K}'$ tel que $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M' , alors $M \in \mathcal{K}'$;
si les deux conditions sont vérifiées, on pose en effet :

$$\mathcal{L} = \text{Mod} \left(\bigvee_{0, \dots, p-1} \bigvee_{M' \in \mathcal{K}'} \bigvee_{a' \in |M'|^p} \chi_s^{(M', a')} \right)$$

3.3 - Cas d'une signature quelconque

Lorsque la signature μ n'est plus forcément finie, le théorème 3.1. 2 peut être transformé de deux manières.

1° $\mathcal{K}$ est une classe s-logique si, et seulement si, il existe une signature finie ν extraite de μ telle que tout système relationnel (M, a) de signature (μ, m) vérifie la condition suivante : pour tout $(M', a') \in \mathcal{K}$, si $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M'_ν vers M_ν , alors $(M, a) \in \mathcal{K}$.

Démonstration : si $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$, alors il existe une ν telle que $\varphi \in \Lambda(\nu)$ et on conclut à l'aide du théorème 3 de 2.2 et du lemme de 2.3; inversement, on peut définir la formule $\varphi = \bigvee_{(M, a) \in \mathcal{K}} x_s^{(M_\nu, a)}$ qui appartient à $\Lambda(\nu)$, et poser $\mathcal{K}' = \text{Mod}(\varphi)$, puis reprendre la démonstration du théorème 3.1.2 en tenant compte du lemme de 2.3.

2° $\mathcal{K}$ est une intersection de classes s-logiques si, et seulement si, pour tout système relationnel (M, a) de signature (μ, m) , il existe une signature finie ν extraite de μ vérifiant la condition précédente.

Démonstration : supposant que $\mathcal{K}$ est une intersection de classes s-logiques, $\mathcal{K}$ vérifie la condition du résultat précédent, donc a fortiori celle-ci. Inversement, soit $\mathcal{K}'$ l'intersection des $\text{Mod} \left(\bigvee_{(M, a) \in \mathcal{K}} x_s^{(M_\nu, a)} \right)$ indexée par l'ensemble des signatures finies ν extraites de μ ; il est évident que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$; si $(M, a) \in \mathcal{K}'$, alors à toute ν correspond $(M', a') \in \mathcal{K}$ tel que $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M'_ν vers M_ν , donc $(M, a) \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.

De la même façon, les propositions 3.1.4 et 3.1.5 deviennent :

Etant donnés le système relationnel (N, b) de signature (μ, m) et la signature finie v extraite de μ , la classe des systèmes relationnels (M, a) de signature (μ, m) tels que $b \circ a^{-1}$ n'est pas [resp. $a \circ b^{-1}$ est] un s-ludion de M_v vers N_v [resp. de N_v vers M_v] est s-logique.

C'est en effet, $\text{Mod}(\neg \chi_{s-1}^{(N_v, b)})$ [resp. $\text{Mod}(\chi_s^{(N_v, b)})$].

Les résultats 3.1.7 et 3.2.1 restent également valables avec des transformations analogues.

CHAPITRE 4 - Les suites restrictives de multirelations et les classes s-logiques indécomposables pour la réunion et pour l'intersection.

Introduction

Les suites restrictives ont été étudiées par R. FRAÏSSÉ [11] (voir aussi [14]) ; elles sont considérées également par A. EHRENFUCHT [9], sous le nom de semi-modèle ; les "sandwiches" de H. J. KEISLER [18] sont des suites restrictives particulières ; signalons également le cas particulier des chaînes normales de sous-groupes distingués étudié par A. I. MALCEV (d'après Abraham ROBINSON [27]).

A la suite de R. FRAÏSSÉ, qui définit des (k, p) -isomorphismes entre suites restrictives, nous définissons, dans le premier paragraphe, la notion de s -ludion entre suites restrictives, en prenant quelques précautions, car la notion de s^{-1} -ludion ne se conserve pas. Le paragraphe 2 met en évidence un résultat essentiel : toute multirelation est s -équivalente à une suite restrictive de base finie. Cela permet d'obtenir une première caractérisation des classes s -logiques par les suites restrictives : son étude fait l'objet du paragraphe 3. Dans le paragraphe 4, nous envisageons la notion de satisfaction d'une formule dans une suite restrictive : ces considérations syntaxiques s'avèreront très intéressantes ; on peut comparer, dans le cas particulier des énoncés universels, avec les formules de TARSKI, récemment considérées par P. KRAUSS [20]. Dans le paragraphe 5, l'étude des classes s -logiques indécomposables pour la réunion permet de considérer une notion analogue, dans le cas des classes universelles, à la notion d'âge due à R. FRAÏSSÉ (voir par exemple [13]). La fin du chapitre est consacrée à des théorèmes duaux qui conduisent notamment à la généralisation de la notion de borne d'énoncé universel [10].

Nous utilisons dans ce chapitre le théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM "descendant" (voir par exemple [1]) : dans le cas d'une signature finie, toute multirelation infinie admet une restriction logique dénombrable.

Pour simplifier la présentation, nous n'envisageons que le cas des classes logiques de multirelations de signature finie : l'extension de nos résultats au cas des systèmes relationnels se fait sans difficulté et la méthode de A. TARSKI permet de traiter le cas d'une signature infinie.

4.1 - Définition des s-ludions entre suites restrictives .

D'après R. FRAÏSSÉ [11], une suite $\mathcal{R} = (M_i)_{i < \omega}$ de multirelations de signature μ est dite une suite restrictive de signature μ lorsque, pour tout $i < \omega$, M_{i+1} est une restriction de M_i . $|M_0|$ sera appelé la base de la suite, qu'on notera $|\mathcal{R}|$, et $\mathcal{R}$ sera dite finie lorsque sa base est finie.

$\mathcal{R}' = (M'_i)_{i < \omega}$ étant une suite restrictive de signature μ , nous définirons comme suit les s-ludions de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, par récurrence sur la longueur de s :

- (i) tout isomorphisme partiel de M_0 vers M'_0 est un ϕ -ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$;
- (ii) si $n, p \in \mathbb{N}$ et $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, un isomorphisme partiel f de M_{21+2} vers M'_{21+2} est un $(s \prec p, n >)$ -ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ lorsque, pour tout $b \in |M_{21+1}|^n$ il existe un isomorphisme partiel $\bar{f}$ de M_{21+1} vers M'_{21+1} prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } g$ et vérifiant ce qui suit : pour tout $c' \in |M'_{21}|^p$, il existe un s-ludion g de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ prolongeant $\bar{f}$ et tel que $\text{Cod } g = \text{Cod } \bar{f} \cup \text{Cod } c'$.

Remarque - L'isomorphisme partiel $\bar{f}$ est manifestement un $(s \prec p, 0 >)$ -ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$.

Cette fois encore, un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}$ sera dit un s-ludion de $\mathcal{R}$.

$(M_i)_{i < \omega}$ est dite une restriction de $(M'_i)_{i < \omega}$ lorsque, pour tout $i < \omega$, M_i est une restriction de M'_i .

4.1.1 - Etant donné $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, les s-ludions de $(M_i)_{i < \omega}$ vers $(M'_i)_{i < \omega}$ ne sont autres que les s-ludions de $(N_i)_{i < \omega}$ vers $(N'_i)_{i < \omega}$, où d'une part $N_i = M_i$ et $N'_i = M'_i$ pour tout $i \leq 21$, d'autre part, pour tout $i > 21$, N_i [resp. N'_i] est la restriction de N_{21} [resp. N'_{21}] à sa partie vide.

Nous pouvons donc nous contenter de parler le cas échéant de s-ludion de $(M_i)_{i \leq 21}$ vers $(M'_i)_{i \leq 21}$:

4.1.2 - Etant données deux multirelations M et M' et deux suites restrictives $(M_i)_{i < \omega}$ et $(M'_i)_{i < \omega}$ de multirelations de signature φ telles que, pour tout

$i < \omega$, $M_i = M$ et $M'_i = M'$, les s-ludions de $(M_i)_i <_\omega$ vers $(M'_i)_i <_\omega$ ne sont autres que les s-ludions de M vers M' .

On identifiera donc la multirelation M à la suite restrictive des multirelations identiques à M et on parlera de s-ludion de M vers $(M'_i)_i <_\omega$ ou de $(M_i)_i <_\omega$ vers M' .

4.1.3 - Tout isomorphisme partiel de M_2 vers M'_2 est un $(< 0, 0 >)$ -ludion de $(M_i)_i <_\omega$ vers $(M'_i)_i <_\omega$.

Etant données des suites $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, $t \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ et une fonction f , f est un (s, t) -ludion de $(M_i)_i <_\omega$ vers $(M'_i)_i <_\omega$ si, et seulement si, f est un $(s < 0, 0 > t)$ -ludion de la suite restrictive

$(M_0, \dots, M_{2l}, N_0, N_1, M_{2l+1}, \dots)$ vers la suite restrictive

$(M'_0, \dots, M'_{2l}, N'_0, N'_1, M'_{2l+1}, \dots)$ quelles que soient les multirelations

N_0, N_1, N'_0, N'_1 compatibles avec la définition des suites restrictives.

Les énoncés 1.1.3, 1.1.4 et 1.1.5 subsistent donc quand on remplace "multirelation" par "suite restrictive", l'énoncé 1.1.2 se modifie aisément comme ci-dessus.

Dans les mêmes conditions, f est un s-ludion de $(M_i)_i <_\omega$ vers $(M'_i)_i <_\omega$ si, et seulement si, f^{-1} est un s^{-1} -ludion de $(N', M'_0, M'_1, \dots)$ vers $(N, M_0, M_1, \dots)$ pour toutes les multirelations N , extension de M_0 , et N' , extension de M'_0 .

4.1.4 - De la même façon, les énoncés 1.1.6, 1.1.8 et 1.1.9 subsistent.

Par ailleurs, on dit qu'une application f de $|M_0|$ dans [resp. sur] $|M'_0|$ est un isomorphisme de $(M_i)_i <_\omega$ dans [resp. sur] $(M'_i)_i <_\omega$ lorsque, pour tout $i < \omega$, $f \upharpoonright |M_i|$ est un isomorphisme de M_i dans [resp. sur] M'_i . L'énoncé 1.1.7 se modifie ainsi :

étant donné $l \in \mathbb{N}$, tout isomorphisme partiel de M_{2l} vers M'_{2l} [resp. de M_{2l+1} vers M'_{2l+1}], prolongeable en un isomorphisme de $(M_i)_i <_\omega$ sur $(M'_i)_i <_\omega$, est

un s-ludion [resp. $(s, \langle p, 0 \rangle)$ -ludion] de $(M_i)_{i < \omega}$ vers $(M'_i)_{i < \omega}$, quel que soit $s \in (N^2)^1$ [resp. quels que soient $s \in (N^2)^1$ et $p \in N$].

4.1.5 - Rapports avec les $(k \star p)$ -isomorphismes entre suites restrictives.

A l'instar de R. FRAÏSSÉ [11], on définit ainsi le $(k \star p)$ -isomorphisme de $\mathcal{R} = (M_i)_{i < \omega}$ vers $\mathcal{R}' = (M'_i)_{i < \omega}$, par récurrence sur k :

(i') tout isomorphisme partiel de M_0 vers M'_0 est un $(0 \star p)$ -isomorphisme de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ quel que soit $p \in N$;

(ii') si k et $p \in N$, un isomorphisme partiel f de M_{k+1} vers M'_{k+1} est un $(k+1 \star p)$ -isomorphisme de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ lorsque,

1° - pour tout $a \in |M_k|^p$, il existe un $(k \star p)$ -isomorphisme de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ prolongeant f à $\text{Dom } f \cup \text{Cod } a$,

2° - pour tout $a' \in |M'_k|^p$, il existe un $(k \star p)$ -isomorphisme $\bar{f}$ de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, prolongeant f , tel que $\text{Cod } \bar{f} = \text{Cod } f \cup \text{Cod } a'$.

PROPOSITION 1 [11] - Etant donnés k et $p \in N$, la suite restrictive $(M_i)_{i < \omega}$ et $F \in \mathcal{P}_\omega(|M_k|)$, il existe une restriction finie $(N_i)_{i < \omega}$ de $(M_i)_{i < \omega}$, avec $|N_k| = F$, telle que l'identité sur F est un $(k \star p)$ -isomorphisme de $(N_i)_{i < \omega}$ vers $(M_i)_{i < \omega}$; en outre, $\bar{N}_0$ est borné par un entier qui dépend seulement de μ, k, p et $\bar{F}$.

On peut étudier, comme au paragraphe 1.3, les rapports entre les $(k \star p)$ -isomorphismes et les s-ludions et démontrer en particulier :

PROPOSITION 2 - Etant donnés les suites restrictives $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, un isomorphisme partiel f de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et $s = (\langle p_i, n_i \rangle)_{i < 1}$, pour tous $k \geq 21$ et $p \geq \bigcup_{i < 1} n_i \cup \bigcup_{i < 1} p_i$, si f est un $(k \star p)$ -isomorphisme de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, alors f est un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et f^{-1} est un s-ludion de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$.

4.2 - La s-équivalence entre suites restrictives.

Etant donnés les suites restrictives $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (de même signature μ), l'ordinal α et les α -suites $a \in |\mathcal{R}|^\alpha$ et $a' \in |\mathcal{R}'|^\alpha$, nous dirons que les systèmes $(\mathcal{R}, a)$ et $(\mathcal{R}', a')$ sont s-équivalents lorsque d'une part $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, d'autre part $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$; nous noterons : $(\mathcal{R}', a) \approx (\mathcal{R}, a')$.

Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, $\mathcal{R} \approx \mathcal{R}'$ signifie qu'il existe un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et un s-ludion de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$.

D'après 4.1.3 et 4.1.4, la s-équivalence est bien une "relation" d'équivalence sur la classe des systèmes de suites restrictives de signature (μ, α) , c'est-à-dire des couples formés d'une suite restrictive de signature μ et d'une α -suite dans sa base.

PROPOSITION - Etant donnés $s \in (\mathbb{N}^2)^1$ [resp. $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, $p \in \mathbb{N}$] et la multirelation M de signature μ , pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in |M|^m$, il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R} = (M_i)_{i < \omega}$, restriction de M , telle que :

- 1° - $|M_{21}| = \text{Cod } a$ [resp. $|M_{21+1}| = \text{Cod } a$] ;
- 2° - $(\mathcal{R}, a) \approx (M, a)$ [resp. $(\mathcal{R}, a) \approx_{s-(\langle p, 0 \rangle)} (M, a)$] ;
- 3° - son cardinal est borné par un entier qui dépend seulement de μ , m et s [resp. μ , m , s et p].

C'est une conséquence immédiate des propositions 1 et 2 de 4.1.5.

COROLLAIRE - Etant donné $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, toute classe de s-équivalence de suites restrictives de signature μ comprenant une multirelation comprend une suite restrictive finie.

Par abus de langage, nous dirons qu'une classe de s-équivalence de multirelations est représentée par une suite restrictive finie.

4.3 - Première caractérisation des classes logiques par les suites restrictives

Nous nous bornerons dans ce qui suit au cas des énoncés et des multirelations.

4.3.1 - THEOREME - Etant données une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ et une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, $\mathcal{K}$ est une classe s-logique si, et seulement si, il existe $h \in \mathbb{N}$ et une famille $(\mathcal{R}_i)_{i < h}$ de suites restrictives finies tels que, pour toute multirelation M de signature μ , la condition suivante est vérifiée : $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, il existe un $i < h$ et un s-ludion de $\mathcal{R}_i$ vers M .

Démonstration : supposons que $\mathcal{K}$ est une classe s-logique ; d'après 4.2, on peut choisir des suites restrictives finies, en nombre h fini, soient $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_{h-1}$, représentant les classes de s-équivalence dont $\mathcal{K}$ est la réunion (3.1.6) ; quelle que soit la multirelation M , d'une part si $M \in \mathcal{K}$, alors il existe $i < h$ tel que $\mathcal{R}_i \approx M$, d'autre part s'il existe un s-ludion d'une $\mathcal{R}_i$ vers M , alors on peut trouver une M' dans $\mathcal{K}$ telle que $M' \approx \mathcal{R}_i$, donc il existe un s-ludion de M' vers M et, d'après le théorème 3.1.2, $M \in \mathcal{K}$.

Inversement, supposons que, pour une multirelation M , il existe une M' dans $\mathcal{K}$ et un s-ludion f de M' vers M ; pour un $i < h$, il existe un s-ludion g de $\mathcal{R}_i$ vers M' , donc $f \circ g$ est un s-ludion de $\mathcal{R}_i$ vers M et $M \in \mathcal{K}$, de sorte que $\mathcal{K}$ est une classe s-logique. CQFD.

Remarque - On peut énoncer un théorème analogue en remplaçant "suite restrictive finie" par "multirelation", mais cela est de moindre intérêt.

DEFINITION - On dit que $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_{h-1}$ sont des suites restrictives finies associées à $\mathcal{K}$.

Aucune suite restrictive finie n'est associée à la classe vide.

COROLLAIRE - Etant données les classes s-logiques $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ si, et seulement si, pour toute suite restrictive finie $\mathcal{R}$ associée à $\mathcal{K}$, il existe une suite

restrictive finie $\mathcal{R}'$ associée à $\mathcal{K}'$ et un s-ludion de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$.

C'est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus et de la proposition 3.1.6.

4.3.2. Cas particuliers et exemples

Compte tenu des propositions 4.1.1 et 4.2, on obtient :

PROPOSITION - Une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ est universelle, si, et seulement si, il existe $h, p \in \mathbb{N}$ et des multirelations finies $M_0, \dots, M_{h-1} \in \mathcal{K}$ tels que, pour toute multirelation M de signature μ , la condition suivante est vérifiée : $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, il existe un $i < h$ tel que toute restriction de M de cardinal $\leq p$ est plongeable dans M_i .

Exemples : il est bien connu qu'une relation binaire est une chaîne si, et seulement si, ses restrictions à 1, 2 ou 3 éléments est plongeable dans l'ordre naturel sur $\{0, 1, 2\}$; une relation binaire est toujours vérifiée, c'est-à-dire est modèle de l'énoncé $\forall_{0,1} p \vee_0 \vee_1$, si, et seulement si, ses restrictions à 1 ou 2 éléments sont plongeables dans la relation binaire toujours vérifiée sur $\{0, 1\}$.

Dans le cas des formules non universelles, une relation binaire R est une chaîne avec minimum [resp. maximum] si, et seulement si, il existe un $(< 3, 1 >)$ -ludion de (R_0, R_1) vers R , où R_0 est l'ordre naturel sur $\{0, 1, 2, 3\}$ et $R_1 = R_0 \upharpoonright \{0\}$ [resp. $R_0 \upharpoonright \{3\}$] ; une relation binaire R' est une chaîne infinie dense si, et seulement si, il existe un $(< 0, 1 >, < 3, 0 >)$ -ludion de $\mathcal{R}' = (R'_0, R'_1, R'_2)$ vers R' , où $R'_1 = R'_0 = R_0$ et $R'_2 = R_0 \upharpoonright \{0, 2, 3\}$.

4.3.3 - Etant données la suite $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ et la suite restrictive finie $\mathcal{R}$ de signature μ , il n'existe pas forcément de multirelation M (de signature μ) telle que $M \approx \mathcal{R}$.

La réponse à cette question, que l'on peut naturellement se poser après avoir obtenu la proposition 4.2, s'avère négative : la suite restrictive $\mathcal{R}'$, de l'exemple précédent, ne pourrait être $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -équivalente qu'à une chaîne infinie dense, mais il ne peut y avoir de $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -ludion d'une telle chaîne vers $\mathcal{R}'$.

Remarque - Il n'existe même pas forcément de multirelation M telle qu'il existe un s -ludion de $\mathcal{R}$ vers M : dans l'exemple précédent, s'il existait une relation binaire R' et un $(\langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -ludion f de $\mathcal{R}'$ vers R' , alors f serait un $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -ludion de $\mathcal{R}'$ vers R' , donc R' serait une chaîne infinie dense mais il est facile de voir que cela est impossible.

4.4 - Formule satisfaite dans une suite restrictive

Etendons aux formules caractérisables (voir 2.1.2) la notion, introduite par A. EHRENFUCHT [9], de suite restrictive modèle d'un énoncé prénexe, en définissant comme suit la relation "a satisfait la formule caractérisable φ dans la suite restrictive $\mathcal{R}$ ", que nous noterons $(\mathcal{R}, a) \models \varphi$, par récurrence sur la caractéristique de φ :

étant donnés l et $m \in \mathbb{N}$, la suite restrictive $\mathcal{R} = (M_i)_{i < \omega}$, $a \in |\mathcal{R}|^m$, φ , φ_1 et $\varphi_2 \in \Lambda^{(m)}$,

- 1° - pour $\varphi \in \Lambda_0$, $(\mathcal{R}, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M_0, a) \models \varphi$; $(\mathcal{R}, a) \models \neg \varphi$ si, et seulement si, $(\mathcal{R}, a) \not\models \varphi$;
- 2° - $(\mathcal{R}, a) \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ [resp. $\varphi_1 \vee \varphi_2$] si, et seulement si, $(\mathcal{R}, a) \models \varphi_1$ et [resp. ou] $(\mathcal{R}, a) \models \varphi_2$;
- 3° - pour $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, n et $p \in \mathbb{N}$, $\psi \in \Lambda_s^{(m+n+p)}$ et $a \in |M_{2l+2}|^m$,
 $(\mathcal{R}, a) \models \exists_{m, \dots, m+n-1} \forall_{m+n, \dots, m+n+p-1} \psi$ si, et seulement si, il existe $b \in |M_{2l+1}|^n$ tel que, pour tout $c \in |M_{2l}|^p$, $(\mathcal{R}, a \circ b \circ c) \models \psi$.

Remarque - Au lieu de $(\mathcal{R}, a) \models \varphi$, on pourrait se contenter d'écrire, comme le fait EHRENFUCHT, $(M_0, \dots, M_{2l}; a) \models \varphi$, avec $a \in |M_{2l}|^m$.

4.4.1 - Les théorèmes de caractérisation pour les suites restrictives

Il suffit de reprendre les démonstrations données dans le chapitre 2 pour étendre les théorèmes 1 à 3 de 2.2 aux suites restrictives ; nous nous contenterons de les énoncer ci-dessous :

THEOREME 1 - Etant donnés la suite restrictive $\mathcal{R} = (M_i)_{i < \omega}$ de signature μ , $l \in \mathbb{N}$ et $s \in (\mathbb{N}^2)^1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in |M_{2l}|^m$, il existe une formule $\chi_s^{(\mathcal{R}, a)} \in \Lambda_s^{(m)}$ [resp. $\chi_{s-1}^{(\mathcal{R}, a)} \in \Lambda_{s-1}^{(m)}$] telle que, pour toute suite restrictive $\mathcal{R}' = (M'_i)_{i < \omega}$ de signature μ et pour tout $a' \in |M'_{2l}|^m$, $a' \circ a^{-1}$ [resp. $a \circ a'^{-1}$]

est un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ [resp. de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$] si, et seulement si, $(\mathcal{R}', a') \models_{\chi_s}^{(\mathcal{R}, a)}$ [resp. $\chi_{s^{-1}}^{(\mathcal{R}, a)}$].

THEOREME 2 - Etant donnés les suites restrictives $\mathcal{R} = (M_i)_{i < \omega}$ et $\mathcal{R}' = (M'_i)_{i < \omega}$ de signature μ , $l \in \mathbb{N}$ et $s \in (\mathbb{N}^2)^l$, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M_{2l}|^m$ et $a' \in |M'_{2l}|^m$, $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, si $(\mathcal{R}, a) \models \varphi$, alors $(\mathcal{R}', a') \models \varphi$.

COROLLAIRE - Sous les mêmes hypothèses, $(\mathcal{R}, a) \approx (\mathcal{R}', a')$ si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, $(\mathcal{R}, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(\mathcal{R}', a') \models \varphi$.

4.4.2 - Application à l'étude des classes logiques

Il est inutile, d'après 4.3.3, de considérer des classes de suites restrictives modèles d'une même formule $\in \Lambda_s^{(0)}$, mais l'emploi des suites restrictives finies permet de compléter l'étude des classes s-logiques.

Soient $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, $\mathcal{K}$ une classe de multirelations (de signature μ) et $\mathcal{R}$ une suite restrictive.

DEFINITION 1 - Nous dirons que $\mathcal{R}$ est s-consistante [resp. s-consistante avec $\mathcal{K}$] lorsqu'il existe une multirelation M [resp. $M \in \mathcal{K}$] telle que $M \approx \mathcal{R}$, autrement dit, d'après 4.4.1, lorsqu'il existe un modèle M [resp. $M \in \mathcal{K}$] de $\chi_s^{\mathcal{R}} \wedge \chi_{s^{-1}}^{\mathcal{R}}$.

DEFINITION 2 - Nous dirons que $\mathcal{R}$ est une s-suite restrictive dans $\mathcal{K}$ lorsqu'il existe une multirelation $M \in \mathcal{K}$ et un s-ludion de M vers $\mathcal{R}$, autrement dit lorsqu'il existe un modèle $M \in \mathcal{K}$ de $\chi_{s^{-1}}^{\mathcal{R}}$.

THEOREME 1 - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ et une classe $\mathcal{K}$ de multirelations (de signature μ), les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{K}$ est une classe s-logique ;

- (ii) pour toute multirelation M et pour toute s-suite restrictive finie $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{K}$, s'il existe un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers M , alors $M \in \mathcal{K}$;
- (iii) pour toute multirelation M et pour toute suite restrictive finie $\mathcal{R}$ consistante avec $\mathcal{K}$, s'il existe un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers M , alors $M \in \mathcal{K}$.

Démonstration :

- (i) implique (ii) - Si $\mathcal{R}$ est une s-suite restrictive finie dans $\mathcal{K}$, alors il existe $M' \in \mathcal{K}$ et un s-ludion de M' vers $\mathcal{R}$, donc il existe un s-ludion de M' vers M et $M \in \mathcal{K}$, d'après le théorème 3.1.2.
- (ii) implique (iii) - En effet, toute suite restrictive s-consistante avec $\mathcal{K}$ est une s-suite restrictive dans $\mathcal{K}$.
- (iii) implique (i) - D'après 3.1.2 et 4.2, s'il existe une multirelation M' et un s-ludion de M' vers M , alors il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R} \preceq M'$ et un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers M , donc $M \in \mathcal{K}$. CQFD.

Enfin, les résultats de 4.3.1 prennent la forme suivante :

THEOREME 2 - Etant donnés $s \in \mathfrak{M}(N^2)$ et une classe $\mathcal{K}$ de multirelations (de signature μ), $\mathcal{K}$ est une classe s-logique si, et seulement si, il existe $h \in N$ et une famille $(\mathcal{R}_i)_{i < h}$ de suites restrictives finies tels que $\mathcal{K} = \text{Mod} \left(\bigvee_{i < h} \chi_s^{\mathcal{R}_i} \right)$.

COROLLAIRE - Etant données les classes s-logiques $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ si, et seulement si, pour toute suite restrictive finie $\mathcal{R}$ associée à $\mathcal{K}$, il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R}'$, associée à $\mathcal{K}'$, qui est modèle de $\chi_s^{\mathcal{R}}$.

4.5 - Classe s-logique indécomposable pour la réunion

DEFINITION - Nous dirons qu'une classe s-logique $\mathcal{K}$ est indécomposable pour la réunion lorsqu'il n'existe pas de classes s-logiques (en nombre évidemment fini), strictement contenues dans $\mathcal{K}$, dont $\mathcal{K}$ soit la réunion.

Exemple - La classe vide des multirelations modèles d'un énoncé contradictoire est indécomposable pour la réunion.

4.5.1 - THEOREME - Etant donnée une classe $\mathcal{K}$, non vide, de multirelations (de signature μ), les six conditions suivantes sont équivalentes :

- (u₁) il existe une formule $\varphi \in \Lambda_S^{(0)}(\mu)$ telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$ et, pour tous φ' , $\varphi'' \in \Lambda_S^{(0)}(\mu)$, si $\varphi \models \varphi' \vee \varphi''$, alors $\varphi \models \varphi'$ ou $\varphi \models \varphi''$;
- (u₂) $\mathcal{K}$ est une classe s-logique indécomposable pour la réunion ;
- (u₃) il existe une multirelation finie ou dénombrable $N \in \mathcal{K}$ telle que, pour toute multirelation M , $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, il existe un s-ludion de N vers M , autrement dit telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(X_S^N)$;
- (u₄) il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R}$ s-consistante avec $\mathcal{K}$ [resp. une s-suite restrictive finie $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{K}$] telle que, pour toute multirelation M , $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, il existe un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers M , autrement dit telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(X_S^{\mathcal{R}})$;
- (u₅) $\mathcal{K}$ est une classe s-logique telle que, pour toutes multirelations $M', M'' \in \mathcal{K}$, il existe $M \in \mathcal{K}$ et des s-ludions de M vers M' et de M vers M'' ;
- (u₆) $\mathcal{K}$ est une classe s-logique telle que, pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ s-consistantes avec $\mathcal{K}$ [resp. s-suites, pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ dans $\mathcal{K}$], il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R}$ s-consistante avec $\mathcal{K}$ [resp. une s-suite restrictive finie $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{K}$] et des s-ludions de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}''$; autrement dit la suite restrictive finie $\mathcal{R}$ est modèle de l'énoncé $X_S^{\mathcal{R}} \wedge X_S^{\mathcal{R}'} \wedge X_S^{\mathcal{R}''} \wedge \varphi$, si $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$.

Démonstration :

(u_1) équivaut à (u_2) - Si $\mathcal{K}$ est une classe s-logique indécomposable pour la réunion, soient alors φ, φ' et $\varphi'' \in \Lambda_s^{(0)}$ tels que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$ et $\varphi \models \varphi' \vee \varphi''$; par suite, $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi') \cup \text{Mod}(\varphi'')$, de sorte que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi')$ ou $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi'')$, donc $\varphi \models \varphi'$ ou $\varphi \models \varphi''$. Inversement, si $\mathcal{K}$ est une classe s-logique, réunion de classes s-logiques $\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{h-1}$, alors il existe φ_0 et $\psi \in \Lambda_s^{(0)}$ tels que $\mathcal{K}_0 = \text{Mod}(\varphi_0)$ et $\bigcup_{0 \leq i < h} \mathcal{K}_i = \text{Mod}(\psi)$, donc $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi_0)$ ou $\mathcal{K} = \text{Mod}(\psi)$; dans la deuxième éventualité, on itère le procédé.

(u_2) implique (u_3) - Soient $N_0, \dots, N_{k-1}$ les multirelations de $\mathcal{K}$ représentant les classes de s-équivalence dont $\mathcal{K}$ est la réunion ; pour chaque $i < h$, désignons par $\mathcal{K}_i$ la classe des multirelations M telles qu'il existe un s-ludion de N_i vers M : $\mathcal{K}_i$ est une classe s-logique, d'après 3.1.5 ; il est clair que $\mathcal{K} = \bigcup_{i < h} \mathcal{K}_i$ mais, par hypothèse, il existe un $j < h$ tel que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_j$; d'après le théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM, il existe une restriction, finie ou dénombrable, N de N_j telle que $N \cong N_j$.

(u_3) implique (u_4) - Il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R} \cong N$; soit la multirelation M ; d'une part, si $M \in \mathcal{K}$, alors il existe un s-ludion de N vers M , donc aussi un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers M ; d'autre part, s'il existe un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers M , alors il existe un s-ludion de N vers M , donc $M \in \mathcal{K}$; $\mathcal{R}$ est a fortiori une s-suite restrictive finie dans $\mathcal{K}$.

(u_4) implique (u_5) - Pour toutes multirelations M' et $M'' \in \mathcal{K}$, il existe des s-ludions de $\mathcal{R}$ vers M' et de $\mathcal{R}$ vers M'' , mais, $\mathcal{R}$ étant une s-suite restrictive dans $\mathcal{K}$, il existe $M \in \mathcal{K}$ et un s-ludion de M vers $\mathcal{R}$, donc il existe des s-ludions de M vers M' et de M vers M'' .

(u_5) implique (u_6) - Soient les suites restrictives finies $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ telles qu'il existe M' et $M'' \in \mathcal{K}$ et des s-ludions de M' vers $\mathcal{R}'$ et de M'' vers $\mathcal{R}''$; il existe $M \in \mathcal{K}$ et des s-ludions de M vers M' et de M vers M'' , donc des s-ludions de M vers $\mathcal{R}'$ et de M vers $\mathcal{R}''$; mais on peut trouver une suite restrictive finie $\mathcal{R} \approx M$, donc il existe des s-ludions de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}''$.

(u_6) implique (u_2) - Supposons qu'il existe une famille $(\mathcal{K}_i)_{i < h}$ de classes s-logiques telles que $\mathcal{K} = \bigcup_{i < h} \mathcal{K}_i$; à tout $i < h$ on peut associer, d'après le théorème 4.3.1, une suite restrictive finie $\mathcal{R}_i$ dans $\mathcal{K}_i$, donc il existe, d'après (u_6) , une suite restrictive finie $\mathcal{R}$ et une multirelation $M \in \mathcal{K}$, avec des s-ludions de M vers $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}$ vers chaque $\mathcal{R}_i$; mais, puisqu'il existe un $j < h$ tel que $M \in \mathcal{K}_j$, montrons que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_j$: pour toute multirelation $M' \in \mathcal{K}$, il existe $k < h$ tel que $M' \in \mathcal{K}_k$, donc il existe un s-ludion de $\mathcal{R}_k$ vers M' et, par suite, un s-ludion de M vers M' , de sorte que, d'après le théorème 3.1.2, $M' \in \mathcal{K}_j$. CQFD.

4.5.2 - Cas particuliers et exemples

Dans le cas des classes universelles, une classe $(\langle p, 0 \rangle)$ -logique $\mathcal{K}$ est indécomposable pour la réunion si, et seulement si, il existe une multirelation finie N telle que, pour toute multirelation M , $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, toute restriction de M de cardinal $\leq p$ est plongeable dans N ; ainsi, d'après 4.3.2, la classe des chaînes est une classe $(\langle 3, 0 \rangle)$ -logique indécomposable pour la réunion.

Les chaînes infinies denses constituent une classe $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -logique indécomposable pour la réunion (voir 4.3.2), qui n'est pas une classe de $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -équivalence : en effet, il n'existe pas de $(\langle 0, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle)$ -ludion d'une chaîne de type η vers une chaîne de type $1 + \eta$. Dans le cas d'un langage de signature $\mu = (m_h)_{h < d}$ tel qu'il existe i et $j < d$, avec $i \neq j$ et $m_i = m_j = 0$, il est clair que $\text{Mod}(\rho_i)$ est une classe ϕ -logique indécomposable pour la réunion,

mais n'est pas une classe de ϕ -équivalence, puisqu'on peut trouver des modèles de $\rho_i \wedge \rho_j$ et de $\rho_i \wedge \neg \rho_j$; donc, pour tout $s \in \mathcal{M}(N^2)$, il existe des classes s-logiques indécomposables pour la réunion qui ne sont pas des classes de s-équivalence. Il est clair, cependant, que toute classe s-logique qui est aussi une classe de s-équivalence est indécomposable pour la réunion.

Il existe, bien sûr, des classes s-logiques qui ne sont pas indécomposables pour la réunion : par exemple, la classe $(< 1, 0 >)$ -logique $\text{Mod}(\bigvee_0 \rho \vee_0 \bigvee_0 \neg \rho \vee_0)$ des relations unaires toujours ou jamais vérifiées, puisqu'on ne peut trouver une telle relation dans laquelle, pour toute relation R unaire toujours ou jamais vérifiée, toute restriction de R de cardinal 1 serait plongeable.

4.5.3 - PROPOSITION - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une classe s-logique $\mathcal{K}$, il existe une famille et une seule de classes s-logiques, indécomposables pour la réunion et maximales (en ce sens qu'aucune d'elles n'est contenue dans une classe s-logique, indécomposable pour la réunion et contenue dans $\mathcal{K}$), dont $\mathcal{K}$ soit la réunion.

Démonstration : si $\mathcal{K}$ n'est pas indécomposable pour la réunion, alors il existe des classes s-logiques indécomposables pour la réunion dont $\mathcal{K}$ est la réunion ; on ne conserve que les classes maximales, soient $\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{h-1}$, auxquelles sont respectivement associées, d'après la condition (u_3) du théorème précédent, les multirelations $N_0, \dots, N_{h-1}$. Supposons qu'il existe une autre décomposition $\mathcal{K}'_0, \dots, \mathcal{K}'_{h'-1}$ de $\mathcal{K}$, auxquelles sont associées $N'_0, \dots, N'_{h'-1}$, et soient $i < h$ et $M \in \mathcal{K}$; si $M \in \mathcal{K}_i$, alors il existe un s-ludion de N_i vers M , mais, N_i appartenant à $\mathcal{K}$, il existe $j < h'$ tel que $N_i \in \mathcal{K}'_j$, donc il existe des s-ludions de N'_j vers N_i et de N'_j vers M , de sorte que $M \in \mathcal{K}'_j$ et $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}'_j$; $\mathcal{K}_i$ étant maximale $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}'_j$; inversement, pour tout $j < h'$, il existe $i < h$ tel que $\mathcal{K}'_j = \mathcal{K}_i$. CQFD.

4.5.4 - THEOREME - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une classe A , non vide, de suites restrictives finies, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1° - il existe une multirelation finie ou dénombrable N telle que, pour toute suite restrictive finie $\mathcal{R}, \mathcal{R} \in A$ si, et seulement si, il existe un s-ludion de N vers $\mathcal{R}$;

2° - (a₁) pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R} \in A$ et $\mathcal{R}'$, s'il existe un s-ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{R}' \in A$;

(a₂) pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'' \in A$, il existe une suite restrictive finie s-consistante $\mathcal{R} \in A$ et des s-ludions de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}''$.

Démonstration : il est clair que la première condition implique la seconde, puisqu'il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R} \approx N$.

Inversement, d'après la proposition 2.2, on peut considérer l'énoncé

$\varphi = \bigvee_{\mathcal{R} \in A} \chi_{\mathcal{R}}^{\mathcal{R}}$. Montrons que $\text{Mod}(\varphi)$ est une classe s-logique indécomposable pour

la réunion : pour tous modèles M' et M'' de φ , il existe $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'' \in A$ tels que

$M' \models \chi_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}'}$ et $M'' \models \chi_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}''}$, donc, d'après le théorème 1 de 4.4.1, il existe des

s-ludions de $\mathcal{R}'$ vers M' et de $\mathcal{R}''$ vers M'' ; or, d'après (a₂), il existe $\mathcal{R} \in A$,

$M \approx \mathcal{R}$ et des s-ludions de M vers M' et M vers M'' ; en outre $\mathcal{R} \models \varphi$, donc (théorème 2

4.4.1) $M \models \varphi$. D'après le théorème 4.5.1, il existe une multirelation finie ou

dénombrable N telle que $\varphi \Rightarrow \chi_N^N$; soit $\mathcal{R}$ une suite restrictive finie ; d'une part,

si $\mathcal{R} \in A$, alors $\mathcal{R} \models \varphi$, donc il existe un s-ludion de N vers $\mathcal{R}$; d'autre part,

s'il existe un s-ludion de N vers $\mathcal{R}$, alors, en désignant par $\mathcal{R}'$ une suite restrictive finie $\mathcal{R}' \approx N$, il existe un s-ludion de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$, mais $\mathcal{R}' \models \chi_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}'}$, donc il existe

$\mathcal{R}'' \in A$ tel que $\mathcal{R}' \models \chi_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}''}$, de sorte qu'il existe des s-ludions de $\mathcal{R}''$ vers $\mathcal{R}'$ et de

$\mathcal{R}''$ vers $\mathcal{R}$, donc, d'après (a₁), $\mathcal{R} \in A$. CQFD.

Remarque - La notion de classe de suites restrictives finies satisfaisant l'une ou l'autre des conditions du théorème précédent est à rapprocher de la notion de fini-âge due à R. FRAÏSSÉ [13]. On obtient d'ailleurs, dans le cas particulier où $s = (< p, 0 >)$, le résultat suivant :

étant donnée une classe A , non vide, de multirelations finies, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1° - il existe une multirelation finie ou dénombrable N telle que, pour toute multirelation finie M , $M \in A$ si, et seulement si, toute restriction de M de cardinal $\leq p$ est plongeable dans N ;
- 2° - (a_1) pour toutes multirelations finies $M \in A$ et M' , si toute restriction de M' de cardinal $\leq p$ est plongeable dans M , alors $M' \in A$;
 (a_2) pour toutes multirelations finies M' et $M'' \in A$, il existe une multirelation finie $M \in A$ telle que toutes les restrictions de M' et de M'' de cardinal $\leq p$ sont plongeables dans M .

COROLLAIRE 1 - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une classe A de suites restrictives finies satisfaisant la condition (a_1) , alors A satisfait la condition (a_2) si, et seulement si, A comprend des suites restrictives s -consistantes et n'est pas la réunion de deux classes strictement contenues dans A et satisfaisant (a_1) .

Démonstration : si A satisfait (a_2) , alors il existe une suite restrictive finie s -consistante dans A ; d'autre part, supposons que A est la réunion de deux classes A' et A'' strictement contenues dans A et satisfaisant (a_1) , auquel cas il existe $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'' \in A$ tels que $\mathcal{R}' \notin A'$ et $\mathcal{R}'' \notin A''$, mais il existe d'après (a_2) , $\mathcal{R} \in A$ et des s -ludions de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}''$; si $\mathcal{R} \in A'$ [resp. A''], alors $\mathcal{R}' \in A'$ [resp. $\mathcal{R}'' \in A''$]; contradiction.

Inversement, considérons, comme dans la démonstration du théorème précédent, l'énoncé $\varphi = \bigvee_{\mathcal{R} \in \Lambda} \chi_S^{\mathcal{R}}$ et montrons que $\text{Mod } \varphi$ (non vide) est une classe s-logique indécomposable pour la réunion. En effet, supposons qu'il existe φ' et $\varphi'' \in \Lambda_S^{(0)}$ tels que $\varphi \models \varphi' \vee \varphi''$ et $\varphi \not\models \varphi'$, $\varphi \not\models \varphi''$ et soient Λ' [resp. Λ''] la classe des $\mathcal{R} \in \Lambda$ tels que $\mathcal{R} \models \varphi'$ [resp. φ'']; Λ' et Λ'' satisfont bien la condition (a_1) , d'après le théorème 2 de 4.4.1, et, par hypothèse, on a (par exemple) $\Lambda' = \Lambda$: si M est un modèle de φ , alors il existe $\mathcal{R} \simeq M$, donc $\mathcal{R} \models \varphi$ et $\mathcal{R} \models \varphi'$, donc $M \models \varphi'$; ainsi $\varphi \models \varphi'$: contradiction. Il existe, d'après la condition (u_3) du théorème 4.5.1, une multirelation finie ou dénombrable N telle que $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\chi_S^N)$; on conclut, comme dans la démonstration du théorème précédent, que Λ est la classe des suites restrictives finies $\mathcal{R}$ telles qu'il existe un s-ludion de N vers $\mathcal{R}$; donc, d'après le théorème, Λ satisfait la condition (a_2) . CQFD.

COROLLAIRE 2 - Etant données une classe K de suites restrictives finies satisfaisant la condition (a_1) et une classe non vide $A \subseteq K$ de suites restrictives finies satisfaisant les conditions (a_1) et (a_2) , il existe une classe maximale A' parmi les classes de suites restrictives finies satisfaisant (a_1) et (a_2) , contenant A et contenues dans K .

Démonstration : d'après le théorème ci-dessus, il existe des suites restrictives finies s-consistantes appartenant à K , auxquelles on peut donc associer un ensemble fini $\mathcal{K}$ de multirelations finies ou dénombrables N' puisqu'il existe un nombre fini, à l'équidéduction près, de formules $\chi_S^{N'}$; si N engendre la classe Λ , on peut trouver une multirelation N' , avec un s-ludion de N' vers N , mais telle que, pour aucune autre multirelation $N'' \in \mathcal{K}$, il n'existe de s-ludion de N'' vers N' : la classe A' des suites restrictives finies $\mathcal{R}$ telles qu'il existe un s-ludion de N' vers $\mathcal{R}$ contient A et est contenue dans K , puisque K satisfait la condition (a_1) .

4.6 - Seconde caractérisation des classes logiques par les suites restrictives

4.6.1 - Le théorème suivant est dual du théorème 4.3.1 :

THEOREME - Etant données une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ , $\mathcal{K}$ est une classe s-logique si, et seulement si, il existe $k \in N$ et une famille $(\mathcal{B}_i)_{i < k}$ de suites restrictives finies tels que, pour toute multirelation M de signature μ , la condition suivante est vérifiée : $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, pour aucun $i < k$, il n'existe de s-ludion de M vers $\mathcal{B}_i$.

Démonstration : au lieu d'une démonstration directe analogue à celle du théorème 4.3.1, déduisons plutôt le résultat de celui-ci. En effet, la classe complémentaire de $\mathcal{K}$ (dans la classe des multirelations de signature μ) est s^{-1} -logique autrement dit $\mathcal{K}$ est s-logique, si, et seulement si, il existe $k \in N$ et une famille $(\mathcal{B}'_i)_{i < k}$ de suites restrictives finies tels que, pour toute M , la condition (C) suivante est vérifiée :

(C) $M \notin \mathcal{K}$ si, et seulement si, il existe $i < k$ et un s^{-1} -ludion de $\mathcal{B}'_i$ vers M ;

(C) s'écrit encore :

$M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, pour aucun $i < k$ il n'existe de s^{-1} -ludion de $\mathcal{B}'_i$ vers M .

Pour chaque $i < k$, si $\mathcal{B}'_i = (M_j)_{j < \omega}$, posons $\mathcal{B}_i = (M_j)_{0 < j < \omega}$; il résulte de 4.1.3 que (C) équivaut à la condition suivante :

$M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, pour aucun $i < k$ il n'existe de s-ludion de M vers $\mathcal{B}_i$. CQFD.

Remarque - Il est clair que $\chi_{s^{-1}}^{\mathcal{B}_i} = \chi_{s^{-1}}^{\mathcal{B}'_i}$, de sorte que la condition du théorème

s'énonce encore : $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, $M \models \bigwedge_{i < k} \neg \chi_{s^{-1}}^{\mathcal{B}_i}$.

DEFINITION - Nous dirons encore que $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{k-1}$ sont des suites restrictives finies associées à $\mathcal{K}$. Le paragraphe qui suit permettra de lever toute ambiguïté.

4.6.2 - Bornes d'une classe logique

Etant donnée une classe s-logique $\mathcal{K}$, on peut lui associer des suites restrictives finies $\mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{k-1}$ représentant les classes de s-équivalence contenues dans $\mathcal{K}$; si on supprime, parmi elles, toute suite $\mathcal{B}$ telle que, pour l'une d'elles, soit $\mathcal{B}'$, il existe un s-ludion de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors celles qui restent constituent ce que nous appellerons un système de bornes de $\mathcal{K}$: elles sont définies à la s-équivalence près.

DEFINITION - Etant données une classe $\mathcal{K}$ et une suite restrictive $\mathcal{B}$, nous dirons que $\mathcal{B}$ est une s-suite restrictive hors de $\mathcal{K}$ lorsqu'il existe une multirelation $M \notin \mathcal{K}$ et un s-ludion de $\mathcal{B}$ vers M , autrement dit lorsqu'il existe un modèle $M \in \mathcal{K}$ de $\chi_s^{\mathcal{B}}$, d'après le théorème 1 de 4.4.1.

Toute borne de $\mathcal{K}$ est évidemment une s-suite hors de $\mathcal{K}$, si $\mathcal{K}$ est s-logique; de plus, ~~une~~ s-suite restrictive $\mathcal{B}$ hors de $\mathcal{K}$ ne peut être une s-suite dans $\mathcal{K}$; en effet, s'il existait une $N \in \mathcal{K}$ et un s-ludion de N vers $\mathcal{B}$, alors il existerait un s-ludion de N vers M , donc M appartiendrait à $\mathcal{K}$: contradiction.

PROPOSITION - Un ensemble $\mathcal{F}$ de s-suites restrictives finies hors de $\mathcal{K}$ peut être associé à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, $\mathcal{F}$ comprend les bornes de $\mathcal{K}$, à la s-équivalence près.

Démonstration : si $\mathcal{F}$ est associé à $\mathcal{K}$, soit $\mathcal{B}$ une borne de $\mathcal{K}$; il existe une multirelation M , s-équivalente à $\mathcal{B}$ et $\notin \mathcal{K}$, donc il existe $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$ et un s-ludion de M vers $\mathcal{R}$; par suite, il existe un s-ludion de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{R}$; mais $\mathcal{B}$ est une borne, donc $\mathcal{B} \approx \mathcal{R}$. Inversement, soit M ; d'une part, si $M \in \mathcal{K}$, alors il n'existe de s-ludion de M vers $\mathcal{R}$ pour aucune $\mathcal{R} \in \mathcal{F}$, puisque $\mathcal{R}$ est une s-suite hors de $\mathcal{K}$; d'autre part, si $M \notin \mathcal{K}$, alors il existe une suite restrictive finie

$\mathcal{R} \leq M$, et aussi une borne $\mathcal{B}$ et un s -ludion de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{B}$, donc il existe un s -ludion de M vers un élément de $\mathcal{F}$.

4.6.3. - Cas particuliers et exemples

Dans le cas particulier où $s = (< p, 0 >)$, $\mathcal{K}$ est une classe $(< p, 0 >)$ -logique si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ et une famille $(\mathcal{B}_i)_{i < k}$ de multirelations finies (n'appartient pas à $\mathcal{K}$) tels que la condition suivante est vérifiée : pour toute M , $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, pour tout $i < k$ et pour toute restriction U de $\mathcal{B}_i$ de cardinal $\leq p$, U n'est pas plongeable dans M .

On retrouve ainsi la caractérisation des classes universelles obtenue par R. FRAÏSSÉ [10], en prenant la famille des restrictions de cardinal $\leq p$ de chacune des $\mathcal{B}_i$, et en ne conservant que les bornes.

Exemple : rappelons qu'une relation binaire R est une chaîne si, et seulement si, on ne peut plonger dans R aucune des relations B, B', B'', B''' respectivement définies sur $\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}$ de la manière suivante : $B'(0, 1) = B'(1, 0) = B'''(0, 1) = B'''(1, 2) = +$ et $B(0, 1) = B'(0, 1) = B''(1, 0) = B'''(0, 2) = -$, avec B' et B'' réflexives, B''' réflexive et antisymétrique.

Une relation binaire R est une chaîne avec minimum si, et seulement si, il n'existe de $(< 3, 1 >)$ -ludion dans aucune des suites restrictives $(B, \phi), (B', \phi), (B'', \phi), (B''', \phi)$ et (R_0, R_1) , où R_0 est la chaîne sur $\{0, 1\}$ et $R_1 = R_0 \upharpoonright \{1\}$.

La classe de toutes les multirelations de signature μ est une classe s -logique, quel que soit $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, sans aucune borne ; pour la classe vide de multirelations (de signature $\emptyset$), on prend une représentante de chacune des classes s -équivalence.

4.7 - Classe s-logique indécomposable pour l'intersection

DEFINITION - Nous dirons qu'une classe s-logique $\mathcal{K}$ est indécomposable pour l'intersection lorsqu'il n'existe pas de classes s-logiques, contenant strictement $\mathcal{K}$, dont $\mathcal{K}$ soit l'intersection.

4.7.1 - LEMME - Une classe s-logique est indécomposable pour l'intersection si, et seulement si, sa classe complémentaire est une classe s^{-1} -logique indécomposable pour la réunion.

THEOREME - Etant donnée une classe $\mathcal{K}$, non pleine, de multirelations de signature μ , les six conditions suivantes sont équivalentes :

- (i₁) il existe une formule $\varphi \in \Lambda_s^{(0)}$, telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$ et, pour tous φ' , $\varphi'' \in \Lambda_s^{(0)}$, si $\varphi \models \varphi' \wedge \varphi''$, alors $\varphi' \models \varphi$ ou $\varphi'' \models \varphi$;
- (i₂) $\mathcal{K}$ est une classe s-logique indécomposable pour l'intersection ;
- (i₃) il existe une multirelation finie ou dénombrable $N \notin \mathcal{K}$ telle que, pour toute multirelation M , $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, il n'existe pas de s-ludion de M vers N , autrement dit telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\bigwedge_s x_{-1}^N)$;
- (i₄) il existe une s-suite restrictive finie $\mathcal{B}$ hors de $\mathcal{K}$ telle que, pour toute M , $M \in \mathcal{K}$ si, et seulement si, il n'existe pas de s-ludion de M vers $\mathcal{B}$, autrement dit telle que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\bigwedge_s x_{-1}^{\mathcal{B}})$;
- (i₅) 1° - pour toutes M et N , si $N \notin \mathcal{K}$ et s'il existe un s-ludion de M vers N , alors $M \notin \mathcal{K}$,
 2° - pour toutes M' et $M'' \notin \mathcal{K}$, il existe $M \notin \mathcal{K}$ et des s-ludions de M' vers M et de M'' vers M ;
- (i₆) 1° - pour toute M et pour toute s-suite restrictive finie $\mathcal{B}$ hors de $\mathcal{K}$, s'il existe un s-ludion de M vers $\mathcal{B}$, alors $M \notin \mathcal{K}$,

2° - pour toutes s-suites restrictives finies $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ hors de $\mathcal{K}$, il existe une s-suite restrictive finie $\mathcal{B}$ hors de $\mathcal{K}$ et des s-ludions de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}''$ vers $\mathcal{B}$.

Démonstration, d'après le théorème 4.5.1 et le lemme précédent : (i_2) est équivalente à chacune des cinq autres conditions. Par exemple, (i_2) équivaut à la conjonction des deux conditions suivantes : premièrement, pour toute M et pour toute suite restrictive finie $\mathcal{R}$ telle qu'il existe une multirelation $N \notin \mathcal{K}$ et un s^{-1} -ludion de N vers $\mathcal{R}$, s'il existe un s^{-1} -ludion de $\mathcal{R}$ vers M , alors $M \notin \mathcal{K}$; deuxièmement, pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ telles qu'il existe N' et $N'' \notin \mathcal{K}$ et des s^{-1} -ludions de N' vers $\mathcal{R}'$ et de N'' vers $\mathcal{R}''$, il existe une suite restrictive finie $\mathcal{R}$, une multirelation $N \notin \mathcal{K}$ et des s^{-1} -ludions de N vers $\mathcal{R}$, de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}''$. La première condition implique le 1° de (i_6) d'après 4.1.3 : en effet, pour toute suite restrictive finie $\mathcal{B} = (M_j)_{j < \omega}$ telle qu'il existe une $N \notin \mathcal{K}$ et un s-ludion de $\mathcal{B}$ vers N , il existe un s^{-1} -ludion de N vers $\mathcal{R} = (M', M_0, \dots, M_n, \dots)$ quelle que soit l'extension M' de M_0 , et pour toute M , s'il existe un s-ludion de M vers $\mathcal{B}$, alors il existe un s^{-1} -ludion de $\mathcal{R}$ vers M , donc $M \notin \mathcal{K}$; inversement, le 1° de (i_6) implique la première condition. D'une manière analogue, la deuxième condition équivaut au 2° de (i_6) .

COROLLAIRE - Une classe s-logique, non pleine, est indécomposable pour l'intersection si, et seulement si, elle possède une borne et une seule.

4.7.2 - PROPOSITION - Etant donnés $s \in \mathfrak{M}(N^2)$ et une classe s-logique $\mathcal{K}$, il existe une famille et une seule de classes s-logiques, indécomposables pour l'intersection et minimales (en ce sens qu'aucune d'elles ne contient de classe s-logique, indécomposable pour l'intersection et contenant $\mathcal{K}$), dont $\mathcal{K}$ est l'intersection.

Démonstration immédiate à partir de la proposition 4.5.3 et du lemme ci-dessus.

4.7.3 - On peut démontrer les résultats duaux de ceux qui sont obtenus en 4.5.4, en particulier.

THEOREME - Etant donnés $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une classe A , non pleine, de suites restrictives finies, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1° - il existe une multirelation finie ou dénombrable N telle que, pour toute suite restrictive finie $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \in A$ si, et seulement si, il n'existe pas de s -ludion de $\mathcal{R}$ vers N ;
- 2° - (a₁) pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R} \notin A$ et $\mathcal{R}'$, s'il existe un s -ludion de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}' \notin A$;
(a₂) pour toutes suites restrictives finies $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'' \notin A$, il existe une suite restrictive finie s -consistante $\mathcal{R} \notin A$ et des s -ludions de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}''$ vers $\mathcal{R}$.

CHAPITRE 5 - Les théories élémentaires

Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons des intersections de classes logiques, autrement dit des classes des modèles des théories. Nous donnons, dans le premier paragraphe, un théorème de caractérisation des $\mathfrak{G}$ -théories, c'est-à-dire des théories engendrées par des axiomes dont la caractéristique appartient à $\mathfrak{G}$, au moyen des s-ludions, avant de distinguer certains sous-ensembles $\mathfrak{G}$ de caractéristiques que nous appelons filtrants, puis de nous intéresser aux théories s-universelles, pour lesquelles nous retrouvons les résultats classiques de ŁOŚ et TARSKI [24], [30].

Dans le paragraphe 3, nous généralisons un théorème d'extension de HENKIN aux s-restrictions et aux restrictions s-logiques, en combinant la méthode des diagrammes de Abraham ROBINSON [27] et la méthode des s-ludions. Cela nous permet de donner, dans le paragraphe suivant, des résultats, généralisant ceux de TARSKI, sur la clôture pour la s-restriction et la restriction s-logique de la classe des modèles d'une théorie s-universelle, puis de nous intéresser au théorème de CHANG-ŁOŚ-SUSZKO [6],[25] sur la somme des chaînes de multirelations, en liaison avec la méthode des "sandwiches" de H. J. KEISLER [18]. Nous considérons, dans le paragraphe 6, les théories engendrées par une multirelation, étendant ainsi aux théories s-universelles un théorème récent de P. KRAUSS [20].

Il est à noter que les caractérisations obtenues ne concernent pas forcément les énoncés prénexes. Répétons également que ces résultats peuvent être modifiés de manière évidente pour le cas, peu courant, où la signature est infinie.

5.1 - Les $\mathcal{G}$ -théories élémentaires

Rappelons qu'étant donnés deux sous-ensembles Ξ et T de $\Lambda^{(0)}(\mu)$ tels que $\Xi \subseteq T$, T est dit une théorie (élémentaire de signature μ) d'axiomatique Ξ , ou engendrée par Ξ , lorsque T est le plus petit sous-ensemble de $\Lambda^{(0)}$ contenant Ξ et les énoncés valides et tel que, pour tous énoncés φ et ψ , si φ et $\varphi \Rightarrow \psi \in T$, alors $\psi \in T$, ou encore, le plus petit sous-ensemble non vide de $\Lambda^{(0)}$ contenant Ξ et tel que, pour tous énoncés φ et ψ , d'une part si $\varphi \in T$ et $\varphi \Rightarrow \psi$ est valide, alors $\psi \in T$, d'autre part, si φ et $\psi \in T$, alors $\varphi \wedge \psi \in T$.

Notations : si $\Phi \subseteq \Lambda^{(0)}(\mu)$, $\mathcal{M}od(\Phi)$ est la classe des multirelations, modèles de tous les éléments de Φ ; étant donnée une classe $\mathcal{K}$ de multirelations (de signature μ), $\text{Th}(\mathcal{K})$ est l'ensemble des formules de $\Lambda^{(0)}(\mu)$ valides dans tous les éléments de $\mathcal{K}$.

On peut dire encore que T est une théorie si, et seulement si, il existe une classe $\mathcal{K}$ de multirelations telle que $T = \text{Th}(\mathcal{K})$.

Étant donnée une classe $\mathcal{K}$ de multirelations, $\mathcal{K}$ est une intersection de classes logiques (ou une Δ -classe logique) [29] si, et seulement si, $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(\text{Th}(\mathcal{K}))$.

Si T est une théorie d'axiomatique Ξ , alors $\mathcal{M}od(T) = \mathcal{M}od(\Xi)$ et $T = \text{Th}(\mathcal{M}od(\Xi))$. T est dite consistante lorsque $\mathcal{M}od(T) \neq \emptyset$.

5.1.1 - Définition des $\mathcal{G}$ -théories

Étant donné $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$, nous dirons qu'une théorie T est une $\mathcal{G}$ -théorie lorsque T contient une axiomatique $\Xi \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{G}} \Lambda_s^{(0)}$. Il est clair que, pour toute théorie T , il existe un ensemble $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$ tel que T est une $\mathcal{G}$ -théorie.

PROPOSITION - Étant donnés $T \subseteq \Lambda^{(0)}$ et $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$, T est une $\mathcal{G}$ -théorie si, et seulement si, $\mathcal{M}od(T)$ est une intersection de classes s -logiques pour $s \in \mathcal{G}$; on pourra dire alors que $\mathcal{M}od(T)$ est une Δ -classe $\mathcal{G}$ -logique.

Pour $s \in \mathcal{M}(N^2)$, T sera dite une théorie s-universelle lorsque T contient un ensemble $\mathbb{Z}$ d'axiomes s-universels (voir la définition en 2.4.3), c'est-à-dire que T est une $\mathcal{G}$ -théorie où $\mathcal{G} = \{s \mid \langle p, 0 \rangle\} / p \in N$; on retrouve ainsi, si $s = \phi$, la notion de théorie universelle.

On pourra prendre encore pour $\mathcal{G}$, avec $l \in N$ donné, l'ensemble $(N^2)^l$ ou un sous-ensemble de $(N^2)^l$, ou encore un ensemble tel que, si $s \in \mathcal{G}$, alors $s^{-1} \in \mathcal{G}$.

Si $\mathcal{G}$ est fini, c'est-à-dire si T est finiment axiomatisable, alors il existe un $s \in \mathcal{M}(N^2)$ tel que T est une $\{s\}$ -théorie, autrement dit tel que $\text{Mod}(T)$ est une classe s-logique.

Exemple - la théorie des ensembles infinis est une $(\{0\} \times N - \{0\})$ -théorie non finiment axiomatisable [1].

5.1.2 - Caractérisation des $\mathcal{G}$ -théories

THEOREME - Etant donnés $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$ et une théorie T , T est une $\mathcal{G}$ -théorie si, et seulement si, pour toute multirelation M , la condition suivante est vérifiée : si, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe $M' \in \text{Mod}(T)$ et un s-ludion de M' vers M , alors $M \in \text{Mod}(T)$.

Démonstration : supposons qu'il existe $\mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{G}} \Lambda_s^{(0)}$ tel que $\text{Mod}(T) = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{Z}} \text{Mod}(\varphi)$; soit une multirelation M satisfaisant l'hypothèse de la condition de l'énoncé ; pour tout $\varphi \in \mathbb{Z}$, il existe $s \in \mathcal{G}$ tel que $\varphi \in \Lambda_s^{(0)}$, donc il existe $M' \in \text{Mod}(\varphi)$ et un s-ludion de M' vers M , de sorte que, d'après le théorème 3.1.2, $M \in \text{Mod}(\varphi)$; finalement, $M \in \text{Mod}(T)$.

Inversement [30], soit $\mathcal{K}$ l'intersection des classes s-logiques, avec s parcourant $\mathcal{G}$, contenant $\text{Mod}(T)$: $\mathcal{K}$ contient $\text{Mod}(T)$; supposons qu'il existe dans $\mathcal{K}$ une multirelation $M \notin \text{Mod}(T)$: par hypothèse, il existe $s \in \mathcal{G}$ tel que pour aucun $M' \in \text{Mod}(T)$ il n'y a de s-ludion de M' vers M ; la classe $\mathcal{M}$ des multirela-

tions M' telles qu'il n'existe pas de s -ludion de M' vers M est une classe s -logique (d'après la proposition 3.1.4) qui contient $\mathcal{M}od(T)$, donc $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ et $M \in \mathcal{K}$: contradiction ; donc $\mathcal{K} = \mathcal{M}od(T)$ et $T = Th(\mathcal{M}od(T))$ est une $\mathcal{G}$ -théorie CQFD.

En particulier, pour $s \in \mathcal{M}(N^2)$, T est une théorie s -universelle si, et seulement si, pour toute multirelation M , la condition suivante est vérifiée : si pour tout $p \in N$, il existe $M' \in \mathcal{M}od(T)$ et un $(s_-(\langle p, 0 \rangle))$ -ludion de M' vers M , alors $M \in \mathcal{M}od(T)$; on trouve ainsi, pour $s = \phi$, un renforcement du théorème de ŁOŚ-TARSKI [24],[30] : T est une théorie universelle si, et seulement si, pour toute M , $M \in \mathcal{M}od(T)$ dès que, pour tout $p \in N$, il existe une multirelation $M \in \mathcal{M}od(T)$ dans laquelle se plonge toutes les restrictions de M de cardinal $\leq p$. On retrouve également un théorème de ŁOŚ-HENKIN [24],[17] : T est une théorie existentielle si, et seulement si, une multirelation $M \in \mathcal{M}od(T)$ dès que toutes les restrictions finies d'un modèle de T sont plongeables dans M .

5.1.3 - Sous-ensemble filtrant de $\mathcal{M}(N^2)$

DEFINITION - Un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$ sera dit filtrant lorsque pour tous s' et $s'' \in \mathcal{G}$, il existe $s \in \mathcal{G}$ tel que tout s -ludion est un s' -ludion et un s'' -ludion.

Il est clair que, pour p et l donnés, $(N^2)^l$ et $\{s_-(\langle p, 0 \rangle)/p \in N\}$ sont filtrants.

LEMME 1 - Etant donnés un sous-ensemble filtrant $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, un ensemble Σ d'énoncés et une multirelation M , si, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe $M' \in \mathcal{M}od(\Sigma)$ et un s -ludion [resp. s^{-1} -ludion] de M' vers M , alors il existe une multirelation $M' \in \mathcal{M}od(\Sigma)$ telle qu'à chaque $s \in \mathcal{G}$ correspond un s -ludion [resp. s^{-1} -ludion] de M' vers M .

Démonstration : considérons l'ensemble $\Sigma' = \Sigma \cup \{x_{s-1}^M / s \in \mathcal{G}\}$; dans tout sous-ensemble fini Φ de Σ n'intervient qu'un nombre fini de suites $s_0, \dots, s_{n-1} \in \mathcal{G}$, donc il existe une suite $s \in \mathcal{G}$ telle que tout s -ludion est un s_i -ludion pour chaque $i < n$; il correspond à s une multirelation $N \in \mathcal{Mod}(\Sigma)$ telle qu'il existe un s -ludion de N vers M , donc aussi, d'après 1.1.3, pour tout $i < n$, un s_i -ludion de N vers M ; ainsi, d'après le théorème 2 de 2.2, pour tout $i < n$, $N \models x_{s_i}^M$, donc $N \in \mathcal{Mod}(\Phi)$. D'après le théorème de compacité, il existe un modèle M' de Σ' , c'est-à-dire que $M' \in \mathcal{Mod}(\Sigma)$ et, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe un s -ludion de M' vers M . Dans le cas des s^{-1} -ludions, on remplace x_{s-1}^m par x_s^m et on applique le théorème 1 de 2.2. CQFD.

Pour $\mathcal{G}$ quelconque, il résulte de 3.1.5 que les multirelations M telles que, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe un s -ludion d'une multirelation N donnée vers M constituent la classe des modèles d'une $\mathcal{G}$ -théorie, plus précisément de la théorie engendrée par $\{x_s^N / s \in \mathcal{G}\}$; plus généralement :

THEOREME 1 - Etant donnés un sous-ensemble filtrant $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$ et une théorie T , si $\mathcal{K}$ est la classe des multirelations M telles qu'il existe une multirelation $N \in \mathcal{Mod}(T)$, et, pour tout $s \in \mathcal{G}$, un s -ludion de N vers M , alors $\text{Th}(\mathcal{K})$ est une $\mathcal{G}$ -théorie; c'est la plus grande $\mathcal{G}$ -théorie contenue dans T .

Démonstration : soit M une multirelation telle que, pour tous $s \in \mathcal{G}$, il existe $M' \in \mathcal{K}$ et un s -ludion de M' vers M ; par hypothèse, à M' correspond une $N' \in \mathcal{Mod}(T)$ et un s -ludion de N' vers M' ; d'après le lemme, il existe une multirelation $N \in \mathcal{Mod}(T)$ telle qu'à chaque $s \in \mathcal{G}$ correspond un s -ludion de N vers M , donc $M \in \mathcal{K}$ et, d'après le théorème 5.1.2, $\text{Th}(\mathcal{K})$ est une $\mathcal{G}$ -théorie. Il est clair que $\mathcal{Mod}(T) \subseteq \mathcal{K}$, donc $\text{Th}(\mathcal{K}) \subseteq T$. Soit T' une $\mathcal{G}$ -théorie telle que $\text{Th}(\mathcal{K}) \subseteq T' \subseteq T$: si $M \in \mathcal{K}$, alors il existe $N \in \mathcal{Mod}(T)$ et, pour tout $s \in \mathcal{G}$, un s -ludion de N

vers M , mais $N \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T')$, donc, d'après le théorème 5.1.2, $M \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T')$; donc $\mathcal{K} = \mathcal{M}_{\text{od}}(T')$ et $\text{Th}(\mathcal{K}) = T'$. CQFD.

En particulier, étant données une suite $s \in \mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ et une théorie T , les multirelations dont les restrictions finies sont s^{-1} -plongeables dans un modèle de T constituent la classe des modèles d'une théorie s -universelle ; autre cas particulier : les multirelations M , telle qu'il existe un modèle de T dont les restrictions finies sont plongeables dans M constituent la classe des modèles d'une théorie existentielle.

Remarque - Pour $\mathcal{G}$ quelconque, il est évident que la classe des M , telles que, pour tous $N \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$ et $s \in \mathcal{G}$, il existe un s -ludion de N vers M , rassemble les modèles de la $\mathcal{G}$ -théorie engendrée par $\{\chi_s^N / s \in \mathcal{G} \text{ et } N \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)\}$; d'autre part, il résulte immédiatement de 5.1.2 que la classe de M , telles que, pour tout $s \in \mathcal{G}$ il existe $N \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$ et un s -ludion de N vers M , est la classe des modèles d'une $\mathcal{G}$ -théorie.

On démontre également, en remplaçant χ_{s-1}^M par $\neg \chi_s^M$ dans la démonstration du lemme 1 :

LEMME 2 - Etant donnés un sous-ensemble filtrant $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$, un ensemble Σ d'énoncés et une multirelation M , si, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe une $M' \in \mathcal{M}_{\text{od}}(\Sigma)$ telle qu'il n'y a pas de s -ludion de M vers M' , alors il existe une $M' \in \mathcal{M}_{\text{od}}(\Sigma)$ telle que pour aucun $s \in \mathcal{G}$ n'existe de s -ludion de M vers M' .

THEOREME 2 - Etant donnés un sous-ensemble filtrant $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ et une théorie T , soit $\mathcal{K}$ la classe de multirelations M telles qu'il existe une multirelation $N \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$ remplissant la condition suivante : pour aucun $s \in \mathcal{G}$ n'existe de s -ludion de M vers N ; alors $\text{Th}(\mathcal{K})$ est une $\mathcal{G}$ -théorie.

Démonstration : soit M une multirelation telle que, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe $M' \in \mathcal{K}$ et un s -ludion de M' vers M ; par hypothèse, à M' correspond une

$N' \in \text{Mod}(T)$ telle qu'il n'y a pas de s-ludion de M' vers N' , donc telle qu'il n'y a pas de s-ludion de M vers N' ; d'après le lemme 2 et la condition du théorème, $M \in \mathcal{K}$, donc $\text{Th}(\mathcal{K})$ est une $\mathcal{C}$ -théorie.

5.2 - Les théories s-universelles

5.2.1 - Caractérisation des théories s-universelles

THEOREME - Etant donnés une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une théorie T, T est s-universelle si, et seulement si, pour tout M, la condition suivante est remplie : si à tout $F \in \mathcal{P}_\omega(|M|)$ correspond un modèle M' de T tel que $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M' , alors $M \in \mathcal{M}_{od}(T)$.

Démonstration : la condition énoncée ici implique la condition du théorème 5.1.2 dans le cas particulier des théories s-universelles. Inversement, la démonstration est analogue à celle du théorème 5.1.2 : la théorie T étant axiomatisée par un ensemble $\mathcal{A}$ d'énoncés s-universels, soit M vérifiant l'hypothèse de la condition du théorème ; pour tout $\varphi \in \mathcal{A}$, il existe $p \in N$ tel que $\varphi \in \Lambda_{s_\omega}(< p, 0 >)$ et, pour toute partie F de |M| de cardinal $\leq p$, il existe un modèle M' de φ tel que $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M' , donc $M \models \varphi$ d'après le théorème 3.2.1. CQFD.

5.2.2 - Cas particuliers

On retrouve, pour $s = \emptyset$, le théorème de ŁOŚ-TARSKI [24], [30] : T est une théorie universelle si, et seulement si, une multirelation M est modèle de T dès que toute restriction finie de M est plongeable dans un modèle de T.

Pour n donné, on précise ainsi un résultat de C.C. CHANG [6] : T est une théorie $(< 0, n >)$ -universelle si, et seulement si, pour toute multirelation M, la condition suivante est vérifiée : si, pour tous $p \in N$ et $a \in |M|^p$, il existe $M' \in \mathcal{M}_{od}(T)$ et $a' \in |M'|^p$ tels que $a \circ a'^{-1}$ est prolongeable à toute partie de |M'| de cardinal $\leq n$ en un isomorphisme partiel de M' vers M, alors $M \in \mathcal{M}_{od}(T)$.

5.2.3 - Plus généralement, nous dirons qu'une théorie est $\mathcal{G}$ -universelle lorsqu'elle est axiomatisée par des énoncés $\varphi \in \Lambda^{(0)}_{s_\omega}(< p, 0 >)$ pour certains $s \in \mathcal{G}$ et $p \in N$. On démontre comme précédemment le résultat suivant :

THEOREME - Etant donnés $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$ et une théorie T , T est $\mathcal{G}$ -universelle si, et seulement si, pour tout M , la condition suivante est remplie : si, pour tous $s \in \mathcal{G}$ et $F \in \mathcal{P}_\omega(|M|)$, il existe un modèle M' de T tel que $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M' , alors $M \in \text{Mod}(T)$.

Lorsque $\mathcal{G} = \{ \langle 0, n \rangle / n \in \mathbb{N} \}$, on retrouve un résultat de C. C. CHANG [6].

5.3 - Le théorème de HENKIN

Nous utiliserons, dans ce paragraphe et les suivants, la méthode des diagrammes, due à Abraham ROBINSON (voir par exemple [27]) : étant donnée la multirelation M de signature μ , le diagramme de M , noté $\Delta(M)$, est l'ensemble des énoncés atomiques qui décrivent M dans le langage $\Lambda(\mu, \overline{M})$, obtenu en "enrichissant" $\Lambda(\mu)$ de la famille $(c_\alpha)_{\alpha < \overline{M}}$ de constantes (ou relations unaires fonctionnelles), chaque c_α correspondant à un élément de M qui l'interprète ; rappelons que M est plongeable dans tout modèle de $\Delta(M)$.

5.3.1 - L. HENKIN a démontré le résultat suivant [16] : étant données une théorie T et une multirelation M , si toute restriction finie de M est plongeable dans un modèle de T , alors il existe un modèle de T qui est une extension de M . Le théorème ci-dessous en est une extension :

THEOREME DE HENKIN - Etant données une théorie T , une multirelation M et une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, si toute restriction finie de M est s -plongeable dans un modèle de T , alors il existe un modèle M' de T dont M est s -restriction.

Démonstration : considérons l'ensemble d'énoncés

$$\Sigma = T \cup \Delta(M) \cup \bigcup_{p \in N} \{ \exists_{0, \dots, p-1} \chi_s^{(M, a)} / a \in |M|^p \}$$

et soit $\Phi \in \mathcal{P}_\omega(\Sigma)$; d'une part il existe $p_0 \in N$ et $a_0 \in |M|^{p_0}$ tels que les seules constantes figurant dans $\Phi \cap \Delta(M)$ sont associées aux éléments de $\text{Cod } a_0$, d'autre part il existe $p_1, \dots, p_n$ dans N , $a_1 \in |M|^{p_1}, \dots, a_n \in |M|^{p_n}$ tels que

$$\Phi \cap (\Sigma - (T \cup \Delta(M))) = \{ \exists_{0, \dots, p_i-1} \chi_s^{(M, a_i)} / 1 \leq i \leq n \} ;$$

soient $a = a_0 \smallfrown a_1 \smallfrown \dots \smallfrown a_n$ et $p = \sum_{i \leq n} p_i$; par hypothèse, il existe un modèle

N de T dans lequel $M \upharpoonright \text{Cod } a$ est s -plongeable, donc, d'après le théorème 1 de 2.2,

$N \models \exists_{0, \dots, p_i-1} \chi_s^{(M, a_i)}$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$; ainsi, $N \in \text{Mod}(\Phi)$.

Par le théorème de compacité, il existe un modèle M' de Σ , donc M' est modèle de T , est extension de M (à un isomorphisme près, puisque $\text{Mod}(T)$ est clos pour l'isomorphie), et, en outre, $M' \models \exists_{0, \dots, p-1} \chi_s^{(M, a)}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $a \in |M|^p$, c'est-à-dire M est s -restriction de M' (voir 2.4.4). CQFD

5.3.2 - Application aux théories existentielles

On retrouve le théorème de LOS-HENKIN [24], [17] : une théorie T est existentielle si, et seulement si, une multirelation M est modèle de T dès qu'il existe une restriction M' de M dans $\text{Mod}(T)$.

En effet, T étant une théorie existentielle et M une multirelation quelconque, s'il existe $M' \in \text{Mod}(T)$ restriction de M , alors toute restriction finie de M' est plongeable dans M , donc, d'après la condition fournie par le théorème 5.1.2, $M \in \text{Mod}(T)$; inversement, si M est une multirelation telle qu'il existe un modèle M' de T dont les restrictions finies sont plongeables dans M , alors d'après le théorème de HENKIN, M' est restriction d'un modèle N de $\text{Th}(M)$, donc, d'après l'hypothèse, $N \in \text{Mod}(T)$ et M , logiquement équivalente à N , est modèle de T , de sorte que T est existentielle d'après le théorème 5.1.2.

5.3.3 - Il est facile de reprendre la démonstration du théorème 5.3.1 pour obtenir le résultat suivant :

THEOREME - Etant donnée une théorie T , une multirelation M et un sous-ensemble filtrant $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, si, pour chaque $s \in \mathcal{G}$, toute restriction finie de M est s -plongeable dans un modèle de T , alors il existe un modèle M' de T dont, pour chaque $s \in \mathcal{G}$, M est s -restriction.

5.3.4 - Une seconde extension du théorème de HENKIN est donnée par le résultat suivant :

THEOREME - Etant donnée une théorie T, une multirelation M et un sous-ensemble filtrant $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, si, pour chaque $s \in \mathcal{C}$, l'identité sur toute restriction finie de M est un s-plongement de cette restriction dans un modèle de T, alors il existe un modèle M' de T dont, pour chaque $s \in \mathcal{C}$, M est restriction s-logique.

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 5.3.1, en remplaçant chaque énoncé $\exists_{0, \dots, p-1} \chi_s^{(M, a)}$, où $a = (a_i)_{i < p} \in |M|^p$, par l'énoncé $(v_i := c(a_i))_{i < p} \chi_s^{(M, a)}$, obtenu en substituant pour tout $i < p$, à la variable v_i la constante $c(a_i)$ interprétée par a_i , et en tenant compte que a satisfait $\chi_s^{(M, a)}$ dans M' si, et seulement si, (M', a) est modèle de $(v_i := c(a_i))_{i < p} \chi_s^{(M, a)}$.

5.4 - Les s-restrictions des modèles d'une théorie

5.4.1 - $\mathcal{K}$ étant une classe de multirelations (de signature μ) et s une suite dans $\mathcal{M}(N^2)$, nous désignerons par $\mathcal{I}_s(\mathcal{K})$ la classe des multirelations M telles qu'il existe une multirelation $M' \in \mathcal{K}$ dont M est s -restriction ; il est clair que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}_s(\mathcal{K})$.

Remarque - A. TARSKI [30] note $\mathcal{I}(\mathcal{K})$ ce que nous notons $\mathcal{I}_\emptyset(\mathcal{K})$.

THEOREME - Etant données une théorie T et une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, $\text{Th}(\mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T)))$ est une théorie s-universelle.

Démonstration : soit M une multirelation telle que, tout $F \in \mathcal{P}_a(|M|)$, il existe une multirelation $M' \in \mathcal{I}_s(\text{Mod}(T))$ tel que $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M' ; il correspond à M' un modèle M'' de T dont M' est s^{-1} -restriction, donc $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans M'' . D'après le théorème de HENKIN, il existe un modèle N de T dont M est s^{-1} -restriction, autrement dit $M \in \mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T))$. Donc $\mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T))$ est une intersection de classes s-universelles et $\text{Th}(\mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T)))$ remplit la condition du théorème 5.2.1. CQFD.

COROLLAIRE 1 - Etant données une théorie T et une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, T est une théorie s-universelle si, et seulement si, T est une théorie telle $\mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T)) \subseteq \text{Mod}(T)$.

Démonstration : si T est une théorie s-universelle, alors toute s^{-1} -restriction d'un modèle de T satisfait manifestement l'hypothèse de la condition du théorème 5.2.1, donc est modèle de T . Inversement, si $\mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T)) \subseteq \text{Mod}(T)$, alors $\mathcal{I}_{s^{-1}}(\text{Mod}(T)) = \text{Mod}(T)$, donc, d'après le théorème, $T = \text{Th}(\text{Mod}(T))$ est une théorie s-universelle. CQFD.

COROLLAIRE 2 - Etant données une classe $\mathcal{K}$ de multirelations (de signature μ) et une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, $\mathcal{K}$ est une classe logique s-universelle si, et seulement si, $\mathcal{K}$ est une classe logique telle que $\mathcal{I}_{s^{-1}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Démonstration : c'est immédiat dans un sens. Dans l'autre sens, si $\mathcal{K}$ est une classe logique telle que $\mathcal{I}_{s-1}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, alors $\text{Th}(\mathcal{K})$ est une théorie s-universelle d'après le corollaire 1, donc il existe un ensemble Ξ d'énoncés s-universels engendrant $\text{Th}(\mathcal{K})$; on conclut, comme dans [31] : $\mathcal{K} = \bigcap_{\varphi \in \Xi} \text{Mod}(\varphi)$, donc $\bigcap_{\varphi \in \Xi} (\text{Mod}(\varphi) - \mathcal{K}) = \emptyset$, mais, pour chaque $\varphi \in \Xi$, $\text{Mod}(\varphi) - \mathcal{K}$ est une classe logique, de sorte que, par le théorème de compacité des classes logiques, il existe $\Phi \in \mathcal{P}_{\omega}(\Xi)$ tel que $\bigcap_{\varphi \in \Phi} (\text{Mod}(\varphi) - \mathcal{K}) = \emptyset$; donc $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi) = \text{Mod}(\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi)$, l'énoncé $\bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi$ étant s-universel. CQFD.

Remarque - Si $\mathcal{K}$ est une classe logique, alors $\mathcal{I}_{s-1}(\mathcal{K})$ n'est pas forcément une classe s-logique (voir [31]).

5.4.2 - Cas des restrictions s-logiques

Etant données une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une classe $\mathcal{K}$ de multirelations (de signature μ), nous désignerons par $\mathcal{L}_s(\mathcal{K})$ la classe des multirelations M telles qu'il existe une multirelation $M' \in \mathcal{K}$ dont M est restriction s-logique. On sait que $\mathcal{L}_s(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{I}_s(\mathcal{K})$.

En utilisant le théorème 5.3.4, on peut obtenir, d'une manière analogue, le résultat suivant :

THEOREME 1 - Etant donnée une théorie T ,

1° - $\text{Th}(\mathcal{L}_{s-1}(\text{Mod}(T)))$ est une théorie s-universelle ;

2° - T est une théorie s-universelle si, et seulement si,

$$\mathcal{L}_{s-1}(\text{Mod}(T)) \subseteq \text{Mod}(T)$$

THEOREME 2 - Etant donnée une classe logique $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ est s-universelle si, et seulement si, $\mathcal{L}_{s-1}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

5.4.3 - $\mathcal{G}$ -restriction et restriction $\mathcal{G}$ -logique

$\mathcal{G}$ étant un sous-ensemble de $\mathcal{M}(N^2)$ et $\mathcal{K}$ une classe de multirelations (de signature μ), nous désignerons par $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$ [resp. $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$] la classe des multirelations M telles qu'il existe une multirelation $M' \in \mathcal{K}$ dont, pour chaque $s \in \mathcal{G}$, M est s -restriction [resp. restriction s -logique].

Autre notation : $\mathcal{G}^{-1} = \{s^{-1} / s \in \mathcal{G}\}$.

On peut reprendre les démonstrations précédentes pour obtenir à l'aide des théorèmes 5.3.3 et 5.3.4 les résultats suivants :

THEOREME - Etant donnés une théorie T et un sous-ensemble filtrant $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$.

- 1° - $\text{Th}(\mathcal{L}_{\mathcal{G}^{-1}}\text{Mod}(T))$ et $\text{Th}(\mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{-1}\text{Mod}(T))$ sont des théories $\mathcal{G}$ -universelles.
- 2° - T est une théorie $\mathcal{G}$ -universelle si, et seulement si,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}^{-1}}\text{Mod}(T) \quad [\text{resp. } \mathcal{L}_{\mathcal{G}}^{-1}\text{Mod}(T)] \subseteq \text{Mod}(T)$$

5.4.4 - Cas particuliers

Dans le cas où $s = \phi$, on retrouve des théorèmes bien connus de A. TARSKI [31].

C.C. CHANG [6] s'intéresse aux restrictions $\mathcal{G}$ -logiques lorsque $\mathcal{G} = \{(<0, n>) / n \in \mathbb{N}\}$ et obtient le théorème 5.4.3 dans ce cas ; le théorème 1 de 5.4.2 précise d'ailleurs ce résultat.

H. J. KEISLER [18] obtient le théorème 5.4.3 pour $\mathcal{G} = (N^2)^1$, avec 1 donné.

Remarque - Nous dirons que M' est s -extension de M lorsque M est s -restriction de M' et nous appellerons énoncé s -existentiel tout énoncé φ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ où $\varphi \in \Lambda_{s, \langle 0, n \rangle}^{(0)}$; nous pouvons alors établir, par une démonstration analogue à celle donnée en 5.3.2, la généralisation suivante du théorème de ŁOŚ-HENKIN, duale du corollaire 1 de 5.4.1 : T est une théorie s -existentielle si, et seulement si, T est une théorie telle que toute s -extension d'un modèle de T est un modèle de T .

5.5 - Le théorème de CHANG-ŁOŚ-SUSZKO

On appelle suite extensive (ou chaîne) de multirelations toute suite $(M_i)_{i < \omega}$ de multirelations (de signature μ) telles que, pour tout $i < \omega$, M_i est restriction de M_{i+1} .

Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, nous dirons que la suite $(M_i)_{i < \omega}$ est $\mathcal{G}$ -extensive [resp. extensive $\mathcal{G}$ -logique] lorsque pour tous $i < \omega$ et $s \in \mathcal{G}$, M_i est une s -restriction [resp. restriction s -logique] de M_{i+1} ; A. TARSKI et R. L. VAUGHT [32] considèrent des suites extensives $\mathcal{M}(N^2)$ -logiques (ou chaînes logiques).

Etant donnée une suite extensive $(M_i)_{i < \omega}$, nous notons, suivant l'usage, $\bigcup_{i < \omega} M_i$ l'extension unique des M_i que l'on peut définir sur $\bigcup_{i < \omega} |M_i|$, c'est-à-dire, si l'on préfère, la somme cardinale des M_i .

5.5.1 - LEMME - Etant donnés $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(N^2)$ et une suite extensive $\mathcal{G}$ -logique $(M_i)_{i < \omega}$, pour tous $j < \omega$ et $s \in \mathcal{G}$, $M_j \preceq_s \bigcup_{i < \omega} M_i$.

Remarque - On retrouve un résultat de A. TARSKI et R. L. VAUGHT [32] lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{M}(N^2)$.

Démonstration, pour $\mathcal{G} = \{s\}$, par récurrence sur la longueur de s : soient n et $p \in \mathbb{N}$; posons $M = \bigcup_{i < \omega} M_i$ et supposons que, pour tout $i < \omega$, M_i est une restriction $(s \prec \langle p, n \rangle)$ -logique de M_{i+1} . Soient $j < \omega$ et $a \in \mathcal{M}(|M_j|)$: montrons que $a \circ a^{-1}$ est un $(s \prec \langle p, n \rangle)$ -ludion de M_j vers M ; quels que soient $b \in |M_j|^n$ et $c \in |M|^p$, il existe $k < \omega$ tel que $|M_k| \supseteq |M_j| \cup \text{Cod } c$; or $(a \frown b) \circ (a \frown b)^{-1}$ est un $(s \prec \langle p, 0 \rangle)$ -ludion de M_j vers M_k , donc il existe $c' \in |M_j|^p$ tel que $(a \frown b \frown c') \circ (a \frown b \frown c)^{-1}$ est un s -ludion de M_j vers M_k ; par l'hypothèse de récurrence, $(a \frown b \frown c) \circ (a \frown b \frown c)^{-1}$ est un s -ludion de M_k vers M , donc $(a \frown b \frown c') \circ (a \frown b \frown c)^{-1}$ est un s -ludion de M_j vers M , de sorte que $a \circ a^{-1}$ est un $(s \prec \langle p, n \rangle)$ -ludion de M_j vers M . CQFD.

THEOREME - Etant donnée une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une théorie T , si T est $\mathcal{G}$ -universelle, où $\mathcal{G} = \{s_{\prec}(\prec 0, n \succ) / n \in N\}$, alors, pour toute suite extensive s-logique $(M_i)_{i < \omega}$ dans $\mathcal{M}od(T)$, $\bigcup_{i \in T} M_i \in \mathcal{M}od(T)$.

Démonstration : soit $(M_i)_{i < \omega}$ une suite extensive $\mathcal{G}$ -logique dans $\mathcal{M}od(T)$; posons $M = \bigcup_{i < \omega} M_i$. Quel que soit $a \in \mathcal{M}(|M|)$, il existe $i < \omega$ tel que $\text{Cod } a \subseteq |M_i|$: $a \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M_i vers M , donc aussi, pour tout $n \in N$, un $(s_{\prec}(\prec 0, n \succ))$ -ludion de M_i vers M , puisque l'identité sur toute partie finie de $|M_i|$ contenant $\text{Cod } a$ est encore un s-ludion de M_i vers M ; ainsi, l'identité sur toute restriction finie de M est, pour chaque $n \in N$, un $(s_{\prec}^{-1}(\prec n, 0 \succ))$ -plongement de cette restriction dans un modèle de T . D'après le théorème 5.3.4, il existe un modèle M' de T dont M est, pour chaque $n \in N$, restriction $(s_{\prec}^{-1}(\prec n, 0 \succ))$ -logique, c'est-à-dire que $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}^{-1}}(\mathcal{M}od(T))$, donc d'après le théorème 5.4.3, $M \in \mathcal{M}od(T)$. CQFD.

5.5.2 - THEOREME - Etant donnés $l, p, q \in N$, avec $q = p$ ou 0 , $s = (\prec q, p \succ, \prec p, p \succ, \dots, \prec p, 0 \succ) \in (N^2)^1$ et une théorie T , si, pour toute suite s-extensive $(M_i)_{i < \omega}$ dans $\mathcal{M}od(T)$, $\bigcup_{i \in T} M_i \in \mathcal{M}od(T)$, alors T est $\mathcal{G}$ -universelle, où $\mathcal{G} = \{s_{\prec}(\prec 0, n \succ) / n \in N\}$.

Démonstration : montrons que T satisfait la condition du théorème 5.4.3 : $\mathcal{L}_{\mathcal{G}^{-1}}(\mathcal{M}od(T)) \subseteq \mathcal{M}od(T)$. Soit en effet $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}^{-1}}(\mathcal{M}od(T))$. Posons $M_0 = M$; il existe un modèle M'_0 de T tel que M_0 est, pour tout $n \in N$, une $(s_{\prec}^{-1}(\prec n, 0 \succ))$ -restriction de M'_0 , et en particulier, pour tout $n \in N$, il existe un $(s_{\prec}^{-1}(\prec n, 0 \succ))$ -ludion de M_0 vers M'_0 , donc toute restriction finie de M'_0 est s-plongeable dans M_0 , de sorte que, d'après le théorème de HENKIN, il existe $M_1 \equiv M_0$ tel que M'_0 est s-restriction de M_1 ; d'après le théorème 5.4.3, $M_1 \in \mathcal{L}_{\mathcal{G}^{-1}}(\mathcal{M}od(T))$, c'est-à-dire qu'il existe un modèle M'_1 de T tel que M_1 est,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, une $(s^{-1} \hookrightarrow (< n, 0 >))$ -restriction de M'_1 , donc aussi, pour $n = p$, une s -restriction de M'_1 ; ainsi, M'_0 est une s -restriction de M'_1 . En poursuivant le raisonnement, on construit une suite extensive $M_0, M'_0, M_1, M'_1, \dots$ telle que, d'une part, $(M_i)_{i < \omega}$ est une suite de multirelations toutes logiquement équivalentes, d'autre part, $(M'_i)_{i < \omega}$ est une suite s -extensive dans $\mathcal{M}_{\text{od}}(T)$. $(M_i)_{i < \omega}$ et $(M'_i)_{i < \omega}$ ont une extension commune unique M' : par hypothèse, $M' \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$; en outre, l'équivalence logique étant compatible avec l'addition cardinale, $M' \equiv M$; donc $M \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$. CQFD.

5.5.3 - On déduit des théorèmes précédents le théorème de CHANG-ŁOŚ-SUSZKO [6], [25] : T est une $\forall \exists$ -théorie, c'est-à-dire est axiomatisée par des énoncés préfixes de la forme $\forall 0, \dots, p-1 \exists 0, \dots, n-1 \varphi$, où $\varphi \in \Lambda_\phi^{(n+p)}$, si et seulement si, pour toute suite extensive $(M_i)_{i < \omega}$ dans $\mathcal{M}_{\text{od}}(T)$, $\bigcup_{i < \omega} M_i \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$.

Nous pouvons obtenir un résultat plus fort.

LEMME 1 - Etant donnés $p \in \mathbb{N}$ et les multirelations M et M' , si M est une $(< p, 0 >)$ -restriction de M' , alors il existe une multirelation $M'' \equiv M'$ telle que M est une restriction $(< p, 0 >)$ -logique de M'' .

En effet, si toute restriction finie de M est $(< n, 0 >)$ -plongeable dans M' , alors par identification des éléments homologues, au besoin en dédoublant des éléments de M' , on obtient une multirelation $M'' \equiv M'$ telle que l'identité sur toute restriction finie de M est manifestement un $(< n, 0 >)$ -ludion de M vers M'' .

Par ailleurs, on obtient, comme dans le lemme de FRAYNE [15] (voir par exemple [1]), un résultat cité également par R. FRAÏSSÉ, qui considère des $\mathbf{1}$ -restrictions c'est-à-dire des restrictions $(< n, 0 >)$ -logiques pour tout $n \in \mathbb{N}$:

LEMME 2 [14] - Etant données les multirelations M et M' , si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, M est une restriction $(< p, 0 >)$ -logique de M' , alors il existe une extension M'' de M' qui est une extension logique de M .

THEOREME - Etant donnés $l, p, q \in \mathbb{N}$, avec $q = p$ ou 0 , $s = \langle \langle q, p \rangle, \langle p, p \rangle, \dots, \langle p, 0 \rangle \rangle \in (\mathbb{N}^2)^1$ et une théorie T , T est $\mathcal{G}$ -universelle, où $\mathcal{G} = \{s_\omega(\langle 0, n \rangle) / n \text{ et } p \in \mathbb{N}\}$, si, et seulement si, pour toute suite extensive $(M_i)_{i < \omega}$, s -logique quel que soit $p \in \mathbb{N}$ dans $\mathcal{M}_{\text{od}}(T)$, $\bigcup_{i < \omega} M_i \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$.

Démonstration : il suffit de reprendre la démonstration du théorème 5.5.2, en construisant une suite $(M'_i)_{i < \omega}$ $\mathcal{M}(\mathbb{N}^2)$ -logique ; nous supposons que $l \geq 1$. M'_0 est, pour tout $p \in \mathbb{N}$, s -restriction de M_1 , donc a fortiori, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\langle \langle p, 0 \rangle \rangle$ -restriction de M_1 , de sorte que, d'après le lemme 1, on peut supposer que M'_0 est, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une restriction $\langle \langle p, 0 \rangle \rangle$ -logique de M_1 . D'après le lemme 2, il existe une extension M'_1 de M_1 qui est une extension logique de M'_0 , ce qui fait que $M'_1 \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$. On obtient ainsi une suite extensive $(M'_i)_{i < \omega}$ s -logique quel que soit $p \in \mathbb{N}$, et on conclut comme ci-dessus.

Remarque - Dans la démonstration précédente, nous construisons en fait un "sandwich" (voir H. J. KEISLER [18]).

5.6 - Théorie engendrée par une multirelation

Etant donnés une classe $\mathcal{K}$ de multirelations de signature μ et un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, nous désignerons par $\text{Th}(\mathcal{K})$ la $\mathcal{G}$ -théorie dont l'axiomatique est l'ensemble des formules $\varphi \in \bigcup_{s \in \mathcal{G}} \Lambda_s^{(0)}$ telles que, pour tout $M \in \mathcal{K}$, $M \models \varphi$; en particulier, pour $\mathcal{K} = \{N\}$, $\text{Th}_{\mathcal{G}}(N) = \text{Th}_{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$ et, pour $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et $\mathcal{G} = \{s_{\prec}(\prec p, 0 \succ)/p \in N\}$, $\text{Th}_{s_{\prec}}(N) = \text{Th}_{\mathcal{G}}(N)$.

PROPOSITION - La théorie $\text{Th}_{\mathcal{G}}(N)$ est axiomatisée par $\{\chi_s^N/s \in \mathcal{G}\}$.

En effet, pour toute multirelation M , dire que M est modèle de $\text{Th}_{\mathcal{G}}(N)$ équivaut à la condition suivante : pour tous $s \in \mathcal{G}$ et $\varphi \in \Lambda_s^{(0)}$, si $N \models \varphi$, alors $M \models \varphi$; autrement dit, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe un s -ludion de N vers M , ou encore pour tout $s \in \mathcal{G}$, $M \models \chi_s^N$.

DEFINITION - Etant données une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$, une multirelation dénombrable N et une théorie s -universelle T , nous dirons que T est engendrée par N lorsque $T = \text{Th}_{s_{\prec}}(N)$.

Utilisant une méthode de M. MORLEY et R. L. VAUGHT [26], P. KRAUSS obtient le résultat suivant :

LEMME 1 [20] - Etant données des multirelations N, M' et M'' , si M' et M'' sont des modèles de $\text{Th}_{s_{\prec}}(N)$, alors il existe une multirelation M telle que $M' \leq M$, $M'' \leq M$ et $N \prec M$.

On en déduit le résultat suivant :

LEMME 2 - Etant données une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et des multirelations N, M' et M'' , si M' et M'' sont des modèles de $\text{Th}_{s_{\prec}}(N)$, alors il existe une multirelation M telle que $M' \leq_{s-1} M$, $M'' \leq_{s-1} M$ et $N \prec M$.

En effet, d'après la proposition, pour tout $p \in N$, il existe un $(s_{\prec}(\prec p, 0 \succ))$ -ludion de N vers M' [resp. M''], donc aussi un $(s_{\prec}(\prec p, 0 \succ))$ -ludion de M vers M' [resp. M''].

THEOREME - Etant données une suite $s \in \mathcal{M}(N^2)$ et une théorie T consistante n'ayant que des modèles infinis, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (u_1) T est s-universelle et, pour toute famille $(T_i)_{i \in I}$ de théorie s-universelles indexée par un ensemble I , si $\mathcal{M}_{\text{od}}(T) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_{\text{od}}(T_i)$, alors il existe $i \in I$ tel que $T_i \subseteq T$;
- (u_2) T est s-universelle et il existe un modèle dénombrable N qui l'engendre ;
- (u_3) 1° - pour toutes multirelations $M \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$ et M' , si $M' \leq_s^{-1} M$, alors $M' \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)$;
- 2° - pour tous modèles M' et M'' de T , il existe un modèle M de T tel que $M' \leq_s^{-1} M$ et $M'' \leq_s^{-1} M$;

Démonstration :

(u_1) équivaut à (u_2) - Supposons la condition (u_1) vérifiée ; il est clair que $\mathcal{M}_{\text{od}}(T) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)} \mathcal{M}_{\text{od}}(\text{Th}_{sV}(M))$, donc il existe un modèle M de T tel que

$T = \text{Th}_{sV}(M)$; d'après le théorème de LÖWENHEIM-SKOLEM, il existe une restriction dénombrable N de M telle que, pour tout $p \in N$, $N \underbrace{s_{\prec}(\prec p, 0 \succ)} M$, c'est-à-dire telle que $\text{Th}_{sV}(M) = \text{Th}_{sV}(N)$. Inversement, soit une famille $(T_i)_{i \in I}$ de théories s-universelles telle que $\mathcal{M}_{\text{od}}(T) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_{\text{od}}(T_i)$, il existe un $i \in I$ tel que $N \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T_i)$; tout modèle M de $\text{Th}_{sV}(N)$ est donc un modèle de T_i , de sorte que $T_i \subseteq T$.

(u_2) équivaut à (u_3) - La première partie de la condition (u_3) ne fait qu'exprimer d'après le corollaire 1 de 5.4.1, que T est s-universelle ; la deuxième partie est une conséquence immédiate du lemme 2. Inversement, posons

$\Sigma = \{x_{s^{-1}(\prec 0, p \succ)}^M / p \in N \text{ et } M \in \mathcal{M}_{\text{od}}(T)\}$; pour tout sous-ensemble fini

$\{x_{s^{-1}(\prec 0, p \succ)}^{M_i} / i < n\}$, il existe, d'après la deuxième partie de la condition

(u_3) , un modèle M de T tel que, pour tout $i < n$, $M_i \leqslant^{-1} M$; en particulier, pour chaque $i < n$, il existe un $(s_{\sim}(< p_i, 0 >))$ -ludion de M vers M_i , donc, d'après le théorème 2 de 2.2, pour tout $i < n$, $M \models \chi_{s_{\sim}^{-1}(< 0, p_i >)}^{M_i}$; par les théorèmes de compacité et de LÖWENHEIM-SKOLEM, il existe un modèle dénombrable N de Σ , de sorte que, pour tout modèle M de T et pour tout $p \in N$, il existe un $(s_{\sim}(< p, 0 >))$ -ludion de N vers M , donc N engendre T . CQFD.

Remarques - L'équivalence des conditions (u_2) et (u_3) généralise un résultat obtenu par P. KRAUSS [20] pour les théories universelles. Par ailleurs, le théorème reste valable si l'on considère des théories $\mathcal{G}$ -universelles, où $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble filtrant de $\mathcal{M}(N^2)$.

5.7 - Caractérisation des théories par les suites restrictives

5.7.1 - Premier théorème de caractérisation

THEOREME - Etant donnés une théorie T et un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, T est une $\mathcal{G}$ -théorie si, et seulement si, il existe une application h de $\mathcal{G}$ dans N et, pour chaque $s \in \mathcal{G}$, une famille $(\mathcal{R}_{s,i})_{i < h(s)}$ de suites restrictives finies telles que, pour toute multirelation M, la condition suivante est remplie : $M \in \text{Mod}(T)$ si, et seulement si, pour tout $s \in \mathcal{G}$, il existe un $i < h(s)$ et un s-ludion de $\mathcal{R}_{s,i}$ vers M.

C'est en effet une conséquence immédiate du théorème 4.3.1 de caractérisation des classes s-logiques par les suites restrictives et du théorème 5.1.2.

En particulier, pour s donné, T est une théorie s-universelle si, et seulement si, il existe $h \in N^N$ et une famille $(\mathcal{R}_{p,i})_{\substack{i < h(p) \\ p \in N}}$ de suites restrictives finies tels que, pour toute multirelation M, la condition suivante est remplie : $M \in \text{Mod}(T)$ si, et seulement si, pour tout $p \in N$, il existe un $i < h(p)$ tel que, pour toute partie F de $|M|$ de cardinal $\leq p$, $M \upharpoonright F$ est s^{-1} -plongeable dans $\mathcal{R}_{p,i}$.

5.7.2 - Second théorème de caractérisation

THEOREME - Etant donnés une théorie T et un sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}(N^2)$, T est une $\mathcal{G}$ -théorie si, et seulement si, il existe une application k de $\mathcal{G}$ dans N et, pour chaque $s \in \mathcal{G}$, une famille $(\mathcal{B}_{s,i})_{i < k(s)}$ de suites restrictives finies telles que, pour toute multirelation M, la condition suivante est remplie : $M \in \text{Mod}(T)$ si, et seulement si, pour aucun $s \in \mathcal{G}$ ni pour aucun $i < k(s)$, il n'existe de s-ludion de M vers $\mathcal{B}_{s,i}$.

On retrouve la notion de borne (voir le paragraphe 4.6.2) introduite par R. FRAÏSSÉ dans le cas des théories universelles [10] ; la condition ci-dessus devient en effet : $M \in \text{Mod}(T)$ si, et seulement si, pour aucun $p \in N$ ni pour aucun

$i < h(p)$ ni pour aucune restriction B de cardinal $\leq p$ de la multirelation finie $\mathcal{B}_{p,i}$, B n'est plongeable dans M : les bornes de T sont toutes ces multirelations finies B (après des modifications évidentes, comme il est indiqué en 4.6.2).

CHAPITRE 6 - Les langages infinis

Introduction

Dans ce chapitre, nous étendons la notion de s-ludion à des suites s , de longueur dénombrable, formées de couples pris dans $N \cup \{\omega\}$, de façon à l'appliquer au langage Λ_{ω_1} (généralement noté $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega}$ [8],[19]). Il est clair qu'on pourrait étendre encore ces notions à un langage $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$, où les cardinaux α et β satisfont la condition $(*)$ de E. G. K. LOPEZ-ESCOBAR [23]. La définition de s-ludion qui est adoptée ici diffère sensiblement de celle qui a été choisie dans le cas fini ; elle est simplement mieux adaptée au cas infini. Il est clair que la définition du cas fini s'étendrait sans changement à un langage $\mathcal{L}_{\alpha, \alpha}$, les théorèmes de caractérisation restant vrais lorsque α est fortement inaccessible.

Nous nous restreindrons au cas des signatures (finitaires) dénombrables, la méthode de A. TARSKI, déjà utilisée dans les chapitres précédents, permettrait de traiter le cas des signatures (finitaires) de longueur quelconque.

6.1 - Le langage Λ_{ω_1} et les s-ludions

L'alphabet du langage $\Lambda_{\omega_1}(\mu)$, de signature (finitaire) μ , ne diffère de l'alphabet de $\Lambda(\mu)$ (voir 2.1) que par l'absence des connecteurs $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ (dont la présence n'est d'ailleurs pas indispensable dans le cas fini).

On définit comme suit Λ_{ω_1} , par récurrence jusqu'à ω_1 à partir de Λ_0 [5], [8], [19] :

si $\alpha < \omega_1$,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha+1} = & \Lambda_{\alpha} \cup \{\neg \varphi / \varphi \in \Lambda_{\alpha}\} \\ & \cup \{\wedge \Phi / \Phi \in \mathcal{B}_{\omega_1}(\Lambda_{\alpha})\} \cup \{\vee \Phi / \Phi \in \mathcal{B}_{\omega_1}(\Lambda_{\alpha})\} \\ & \cup \bigcup_{0 < p < \omega} \{\exists_{k_0, \dots, k_{p-1}} \varphi / (k_i)_{i < p} \in \omega^p \text{ et } \varphi \in \Lambda_{\alpha}\} \\ & \cup \bigcup_{0 < p < \omega} \{\forall_{k_0, \dots, k_{p-1}} \varphi / (k_i)_{i < p} \in \omega^p \text{ et } \varphi \in \Lambda_{\alpha}\} \quad ; \end{aligned}$$

si α est un ordinal limite $< \omega_1$,

$$\Lambda_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} \Lambda_{\beta}$$

Comme dans le cas fini, on considère, pour chaque formule φ , l'ensemble $VL(\varphi)$ des variables ayant des occurrences libres dans φ ; mais on se restreindra à l'ensemble des formules φ telles que $\overline{VL(\varphi)} < \omega$ de façon à pouvoir définir dans le langage l'énoncé obtenu à partir de φ par quantification (universelle ou existentielle) des variables appartenant à $VL(\varphi)$; on pose donc :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\omega_1}^{(m)} = & \{\varphi \in \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Lambda_{\alpha} / VL(\varphi) \subseteq \{v_k / k < m\}\} \\ \text{et } \Lambda_{\omega_1} = & \bigcup_{m < \omega} \Lambda_{\omega_1}^{(m)}. \end{aligned}$$

On considèrera des combinaisons booléennes positives de formules de Λ_{ω_1} .

Nous ne rappelons pas la sémantique de Λ_{ω_1} dont on peut trouver la description dans les ouvrages cités plus haut. Rappelons seulement que toute formule de Λ_{ω_1} n'est pas toujours équidéduite d'une formule prénexe de Λ_{ω_1} , contrairement au cas fini.

6.1.1 - Les fragments $\Lambda_{\omega_1, s}$ de Λ_{ω_1} .

Considérons l'ensemble $(\omega + 1)^2$; soit $\mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} ((\omega + 1)^2)^\alpha$.

Etant donnée une suite $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2)^\alpha$, on définit comme suit l'ensemble $\Lambda_{\omega_1, s}$ des formules de Λ_{ω_1} , par récurrence jusqu'à ω_1 sur la longueur de s :

- (i) $\Lambda_{\omega_1, \emptyset}$ est l'ensemble des formules sans quantificateur de Λ_{ω_1} ;
- (ii) pour tout ordinal $\alpha < \omega_1$, pour tout suite $s = ((\omega + 1)^2)^\alpha$, pour tout couple $\langle p, n \rangle \in (\omega + 1)^2$ et pour toute formule $\varphi \in \Lambda_{\omega_1}$, $\varphi \in \Lambda_{\omega_1, s_{\langle p, n \rangle}}$ si, et seulement si, $\varphi \in \Lambda_{\omega_1, s}$ ou est une combinaison booléenne positive de formules de la forme

$$\exists_{k_0, \dots, k_{n'-1}} \forall_{l_0, \dots, l_{p'-1}} \psi,$$

où $n' < n$, $p' < p$ et $\psi \in \Lambda_{\omega_1, s}$;

- (iii) pour tout ordinal limite $\alpha < \omega_1$, pour toute suite $s = (\langle p_\beta, n_\beta \rangle)_{\beta < \alpha} \in ((\omega + 1)^2)^\alpha$ et pour toute formule $\varphi \in \Lambda_{\omega_1}$, $\varphi \in \Lambda_{\omega_1, s}$ si, et seulement si, φ est une combinaison booléenne positive de formules dont chacune $\in \Lambda_{\omega_1, s'}$, ou $s' = (\langle p'_\beta, n'_\beta \rangle)_{\beta < \alpha'}$ et vérifie la condition suivante : $\alpha' < \alpha$ et il existe une suite $s'' = (\langle p''_\beta, n''_\beta \rangle)_{\beta < \alpha'}$, sous-suite initiale extraite de s , telle que,

pour tout $\beta < \alpha'$, $p'_\beta \leq p''_\beta$ et $n'_\beta \leq p''_\beta$.

NOTATION - $\Lambda_{\omega_1, s}^{(m)} = \Lambda_{\omega_1, s} \cap \Lambda_{\omega_1}^{(m)}$.

PROPOSITION - Les formules réduites (c'est-à-dire obtenues en "repoussant" les occurrences de $\neg$ jusqu'aux formules atomiques [8]) sont contenues dans

$\bigcup_{s \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{((\omega+1)^2)}} \Lambda_{\omega_1, s}$; en fait, pour toute formule φ de Λ_{ω_1} , il existe
 $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{((\omega+1)^2)}$ et $\psi \in \Lambda_{\omega_1, s}$ tels que $\psi \models \varphi$.

Exemples : $\varphi_0 = \exists_0 v_0 \asymp v_0 \in \Lambda_{\omega_1, (<1, 2>)}$, $\varphi_1 = \forall_0 v_0 \asymp v_0 \in \Lambda_{\omega_1, (<2, 1>)}$
 et $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \in \Lambda_{\omega_1, (<2, 2>)}$. Soient le prédicat n-aire ρ_n et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
 $\varphi_{p+1} = \forall_{0, \dots, p} \rho_n v_0 \dots v_{n-1}$; $\forall \{\varphi_{p+1} / p < \omega\} \in \Lambda_{\omega_1, (<\omega, 1>)}$. Soient, pour
 tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in \{<1, n+2>\}^{n+1}$ et $\varphi_{n+2} \in \Lambda_{\omega_1, s_n}$, alors $\forall \{\varphi_n / n \in \mathbb{N}\} \in \Lambda_{\omega_1, s}$,
 où $s = (<1, n_i>)_{i < \omega}$, avec, pour tout $i < \omega$, $n_i = \omega$.

6.1.2 - Les s-ludions

M et M' étant deux multirelations (de signature μ), on définit comme suit les
 (ω_1, s) -ludions (ou plus simplement les s-ludions) de M vers M', où
 $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{((\omega+1)^2)}$, par récurrence jusqu'à ω_1 sur la longueur de s :

- (i) tout isomorphisme partiel de M vers M' est un ϕ -ludion de M vers M' ;
- (ii) pour n et $p \in \omega + 1$, un isomorphisme partiel f de M vers M' est un
 $(s_{< <p, n>})$ -ludion de M vers M' lorsque, pour tous $n' < n$ et $p' < p$,
 pour tout $b \in |M|^{n'}$, il existe un isomorphisme partiel $\bar{f}$ prolongeant f à
 $\text{Dom } f \cup \text{Cod } b$ tel que, pour tout $c' \in |M'|^{p'}$, il existe un isomorphisme
 partiel g qui prolonge $\bar{f}$ et qui est un s-ludion de M vers M' vérifiant :
 $\text{Cod } g = \text{Cod } \bar{f} \cup \text{Cod } c'$;

(iii) si α est un ordinal limite $< \omega_1$ et si $s \in ((\omega + 1)^2)^\alpha$, alors f est un s -ludion de M vers M' lorsque, pour toute sous-suite initiale s' , de longueur $< \alpha$, extraite de s , f est un s' -ludion de M vers M' .

Les propriétés immédiates du cas fini sont conservées, moyennant des modifications évidentes. Nous n'étudierons pas les rapports des (ω, s) -ludions avec les $(\alpha \star \omega)$ -isomorphismes définis par J. P. CALAIS [5]. Signalons que E. G. K. LOPEZ-ESCOBAR [23] a défini des s -ludions dans le cas particulier où tous les termes de la suite s sont égaux à $< \omega, 1 >$.

On démontre par récurrence sur la longueur de s le résultat suivant :

LEMME - Etant données des multirelations M et M' (de signature μ), $m \in \mathbb{N}$ $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, si Φ est un sous-ensemble de $\Lambda_{\omega_1, s}^{(m)}$ tel que pour toute formule φ de Φ , la condition suivante est vérifiée :

$$(M, a) \models \varphi \text{ implique } (M', a') \models \varphi ,$$

alors toute combinaison booléenne positive de formules de Φ satisfait cette condition.

PROPOSITION - Etant donnés une suite $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2)$, des multirelations M et M' et un s -ludion f de M vers M' , pour tous $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$ tels que f prolonge $a' \circ a^{-1}$ et pour toute formule $\varphi \in \Lambda_s^{(m)}$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a') \models \varphi$.

Démonstration par récurrence sur la longueur α de s à partir du cas évident où $\alpha = 0$: si α est limite, tout s -ludion de M vers M' est, pour toute sous-suite initiale s' de longueur $< \alpha$ extraite de s , un s' -ludion de M vers M' , donc $a' \circ a^{-1}$ est un s' -ludion de M vers M' , auquel cas, d'après l'hypothèse de récurrence, pour toute formule $\varphi \in \Lambda_{s'}^{(m)}$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a') \models \varphi$, donc

la condition est encore vérifiée pour toutes les formules φ de $\Lambda_s^{(m)}$, puisque $\Lambda_s^{(m)}$ est la réunion des $\Lambda_{s'}^{(m)}$, où s' est sous-suite initiale de longueur $< \alpha$ extraite de s . Si $a' \circ a^{-1}$ est un $(s_{<p, n>})$ -ludion de M vers M' et si

$(M, a) \models \exists_{k_0, \dots, k_{n'-1}} \forall_{l_0, \dots, l_{p'-1}} \psi$, où $p' < p$, $n' < n$ et $\psi \in \Lambda_{\omega_1, s}^{(m+n'+p')}$,

alors il existe $b \in |M|^{n'}$ tel que $(M, a \smallfrown b) \models \forall_{l_0, \dots, l_{p'-1}} \psi$, mais à b corres-

pond $b' \in |M'|^{n'}$ tel que, pour tout $c' \in |M'|^{p'}$, il existe $c \in |M|^{p'}$ vérifiant :

$(a' \smallfrown b' \smallfrown c') \circ (a \smallfrown b \smallfrown c)^{-1}$ est un s -ludion de M vers M' ; de plus, $(M, a \smallfrown b \smallfrown c) \models \psi$,

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(M', a' \smallfrown b' \smallfrown c') \models \psi$, donc

$(M', a') \models \exists_{k_0, \dots, k_{n'-1}} \forall_{l_0, \dots, l_{p'-1}} \psi$; on conclut à l'aide du

lemme.

6.2 - Les théorèmes de caractérisation dans Λ_{ω_1}

Nous considérerons seulement le cas des signatures dénombrables, la méthode de A. TARSKI permettant de traiter le cas général.

THEOREME 1 - Etant données une multirelation M , dénombrable, de signature dénombrable μ , et une suite $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in |M|^m$, il existe une formule $\chi_s^{(M,a)} \in \Lambda_{\omega_1, s}^{(m)}$ telle que, pour toute multirelation M' de signature μ et pour tout $a' \in |M'|^m$, $a' \circ a^{-1}$ est un s -ludion de M vers M' si, et seulement si $(M', a') \models \chi_s^{(M,a)}$.

Démonstration par récurrence sur la longueur α de s : comme dans la démonstration du théorème 1 de 2.2, $\chi_\phi^{(M,a)}$ est la formule sans quantificateur qui décrit $M \Vdash \text{Cod } a$; elle appartient à Λ_{ω_1} puisque μ est dénombrable. Si α est limite, on prend pour $\chi_s^{(M,a)}$ la conjonction dénombrable des formules $\chi_{s'}^{(M,a)}$ pour toute suite s' de longueur $< \alpha$, sous-suite initiale de s . Supposons le théorème vrai pour s et soit $\langle p, n \rangle \in (\omega + 1)^2$; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $a' \circ a^{-1}$ est un $(s \smallfrown \langle p, n \rangle)$ -ludion de M vers M' ;
- (2) pour tous $p' < p$ et $n' < n$, pour tout $b \in |M|^{n'}$, il existe $b' \in |M'|^{n'}$ tel que pour tout $c' \in |M'|^{p'}$, il existe $c \in |M|^{p'}$ vérifiant :
 $(a' \smallfrown b' \smallfrown c') \circ (a \smallfrown b \smallfrown c)^{-1}$ est un s -ludion de M vers M' ;
- (3) pour tous $p' < p$ et $n' < n$, pour tout $b \in |M|^{n'}$, il existe $b' \in |M'|^{n'}$ tel que pour tout $c' \in |M'|^{p'}$, il existe $c \in |M|^{p'}$ vérifiant (d'après l'hypothèse de récurrence) : $(M', a' \smallfrown b' \smallfrown c') \models \chi_s^{(M, a \smallfrown b \smallfrown c)}$, où $\chi_s^{(M, a \smallfrown b \smallfrown c)} \in \Lambda_{\omega_1, s}^{(m+n'+p')}$. M étant dénombrable, la formule

$\bigvee_{c \in |M|^{p'}} \chi_s^{(M, a \smallfrown b \smallfrown c)}$ est définie dans Λ_{ω_1} , donc les conditions précédentes équivalent à la suivante :

(4) pour tous $p' < p$ et $n' < n$, pour tout $b \in |M|^{n'}$,

$$(M', a') \models \exists_{m, \dots, m+n'-1} \forall_{m+n', \dots, m+n+p'-1} \bigvee_{c \in |M|^{p'}} \chi_s^{(M, a, b, c)}$$

pour la même raison, (4) équivaut à :

(5) pour tous $p' < p$ et $n' < n$,

$$(M', a') \models \bigwedge_{b \in |M|^{n'}} \exists_{m, \dots, m+n'-1} \forall_{m+n', \dots, m+n+p'-1} \bigvee_{c \in |M|^{p'}} \chi_s^{(M, a, b, c)}$$

on prend pour $\chi_{s-}^{(M, a)}(< p, n >)$ la conjonction de toutes ces formules pour $p' < p$ et $n' < n$. CQFD.

On obtient, comme dans 2.2 :

THEOREME 2 - Etant données deux multirelations M , dénombrable, et M' , et une suite $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2)$, pour tous $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M vers M' si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :
pour toute formule $\varphi \in \Lambda_{\omega_1, s}^{(m)}$, si $(M, a) \models \varphi$, alors $(M', a') \models \varphi$.

Comme dans le cas fini, on peut associer à toute suite $s = (< p_\beta, n_\beta >)_{\beta < \alpha}$ une suite $s^{-1} = (< p'_\beta, n'_\beta >)_{\beta < \alpha'}$, telle que :

- 1° - $p'_0 = 1$ et $n'_0 = p_0$, si β est limite, alors $\alpha' = \alpha$, sinon, $\alpha' = \alpha + 1$
et $p'_\alpha = n_{\alpha-1}$, $n'_\alpha = 1$;
- 2° - pour tout $\beta < \alpha$, si β est limite, alors $p'_\beta = 1$ et $n'_\beta = p_\beta$, sinon,
 $p'_\beta = n_{\beta-1}$ et $n'_\beta = p_\beta$.

Par une démonstration analogue à celle du théorème 1, on obtient alors :

THEOREME 3 - Avec les mêmes conditions que celles du théorème 1, il existe une formule $\chi_{s^{-1}}^{(M, a)} \in \Lambda_{\omega_1, s^{-1}}^{(m)}$ telle que, pour tout M' et pour tout $a' \in |M'|^m$, $a' \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M si, et seulement si, $(M', a') \models \chi_{s^{-1}}^{(M, a)}$.

Etant donnés deux multirelations M et M' , $m \in \mathbb{N}$, $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, nous dirons que (M, a) est s-équivalent à M' et nous noterons $(M, a) \stackrel{s}{\sim} (M', a')$ lorsque $a' \circ a^{-1}$ est un s-ludion de M vers M' et que $a \circ a'^{-1}$ est un s-ludion de M' vers M .

THEOREME 4 - Etant donnés une suite $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2)$, $m \in \mathbb{N}$, des multirelations dénombrables M et M' , $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1° - $(M, a) \stackrel{s}{\sim} (M', a')$;

2° - pour tout $\varphi \in \Lambda_{\omega_1, s}^{(m)}$, $(M, a) \models \varphi$ si, et seulement si, $(M', a') \models \varphi$.

COROLLAIRE - Etant donnés $m \in \mathbb{N}$, les multirelations dénombrables M et M' , $a \in |M|^m$ et $a' \in |M'|^m$, $(M, a) \equiv (M', a')$ (en notant encore $\equiv$ l'équivalence logique vis-à-vis de $\Lambda_{\omega_1}^{(m)}$) si, et seulement si, pour tout $s \in \mathcal{M}_{\omega_1}((\omega + 1)^2)$, $(M, a) \stackrel{s}{\sim} (M', a')$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BELL J. L., SLOMSON A. B. - Models and ultraproducts ; an introduction ;
North-Holland, 1969.
- [2] BÉNÉJAM J.-P. - Une classification des isomorphismes locaux et son application
à la logique;
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 529-532, 1970.
- [3] BÉNÉJAM J.-P. - Quelques propriétés algébriques des isomorphismes locaux;
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 972-975, 1970.
- [4] BÉNÉJAM J.-P. - La méthode des s-ludions et les classes logiques;
C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 981-984, 1971.
- [5] CALAIS J.-P. - Partial isomorphisms and infinitary languages;
Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, à paraître.
- [6] CHANG C. C. - On unions of chains of models;
Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 10,
p. 120-127, 1959.
- [7] COHEN Paul J. - Set theory and the continuum hypothesis;
Benjamin, 1966.
- [8] DICKMANN M. A. - Large infinitary languages;
North-Holland, à paraître.
- [9] EHRENFUCHT A. - Decidability of the theory of one linear ordering relation;
Notices of the American Mathematical Society, vol. 6, p. 268-
269, 1959.

- [10] FRAÏSSÉ R. - Some elementary properties of universal classes;
Bulletin of the American Mathematical Society, t. 60, p. 396-397, 1954.
- [11] FRAÏSSÉ R. - Sur quelques classifications des relations, basées sur des isomorphismes restreints;
Publications Scientifiques de l'Université d'Alger, t. 2, n° 1, p. 15-60, 1955.
- [12] FRAÏSSÉ R. - Cours de logique mathématique;
Tome 1 (1ère édition), Gauthier-Villars, 1967.
- [13] FRAÏSSÉ R. - Cours de logique mathématique;
Tome 1 (2ème édition refondue), Gauthier-Villars, 1971.
- [14] FRAÏSSÉ R. - Cours de logique mathématique;
Tome 2, Gauthier-Villars, à paraître.
- [15] FRAYNE T. E., MOREL A., SCOTT D. - Reduced direct products;
Fundamenta Mathematicae, t. 51, p. 195-228, 1962.
- [16] HENKIN L. - Some interconnections between modern algebra and mathematical logic;
Transactions of the American Mathematical Society, t. 74, p. 410-427, 1953.
- [17] HENKIN L. - Two concepts from the theory of models;
The Journal of Symbolic Logic, vol. 21, p. 28-32, 1956.
- [18] KEISLER H. J. - Theory of models with generalized atomic formulas;
The Journal of Symbolic Logic, vol. 25, p. 1-26, 1960.
- [19] KEISLER H. J. - Model theory for infinitary logic;
North-Holland, 1971.

- [20] KRAUSS P. - Universally complete universal theories;
Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik,
vol. 17, p. 351-370, 1971.
- [21] KREISEL G., KRIVINE J.-L. - Eléments de logique mathématique;
Dunod, 1967.
- [22] LAÜCHLI H., LEONARD J. - On the elementary theory of linear order;
Fundamenta Mathematicae, t. 59, p. 109-116, 1966.
- [23] LOPEZ-ESCOBAR E. G. K. - Universal formulas in the infinitary language $L_{\alpha\beta}$;
Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, série des sc.
math., astr. et phys., vol. 13, n° 6, p. 383-388, 1965.
- [24] ŁOŚ J. - On the extending of models (I);
Fundamenta mathematicae, t. 42, p. 38-54, 1955.
- [25] ŁOŚ J., SUSKO R. - On the extending of models (IV);
Fundamenta Mathematicae, t. 44, p. 52-60, 1957.
- [26] MORLEY M., VAUGHT R. L. - Homogeneous universal models;
Mathematica Scandinavia, vol. 11, p. 37-57, 1962.
- [27] ROBINSON Abraham - Introduction to model theory and to the metamathematics of
algebra;
North-Holland, 1963.
- [28] SHOENFIELD J. R. - Mathematical Logic;
Addison-Wesley, 1967.
- [29] TARSKI A. - Grundzüge des Systemenkalküls (II);
Fundamenta Mathematicae, t. 26, p. 283-301, 1936.
- [30] TARSKI A. - Contributions to the theory of models (I);
Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam,
sér. A, vol. 57, p. 572-581, 1954.

- [31] TARSKI A. - Contributions to the theory of models (II);
 Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam,
 sér. A, vol. 57, p. 582-588, 1954.

- [32] TARSKI A., VAUGHT R. L. - Arithmetical extensions of relational systems;
 Composition Mathematica, vol. 13, p. 81-102, 1957.

- [33] VAUGHT R. L. - Remarks on universal classes of relational systems;
 Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam, sér. A,
 vol. 57, p. 589-591, 1954.

INDEX DES DEFINITIONS ET NOTATIONS

Les numéros renvoient aux paragraphes ou à leurs subdivisions.

borne d'une classe s-logique	4.6.2
caractéristique d'une formule	2.1.2
classe s-logique	3.1
—— indécomposable pour l'intersection	4.7
—— indécomposable pour la réunion	4.5
—— relativement à une classe de multirelations	3.1.7
combinaison booléenne positive de formules	2.1.1
équivalence s-logique	2.4
—— s-universelle	2.4.3
s-équivalence entre multirelations	1.4
—— entre suites restrictives	4.2
filtrant	5.1.3
formule $\chi_s^{(M,a)}$	2.2
formule caractérisable	2.1.2
langage Λ_s	2.1.2
—— Λ_{ω_1}	6.1
—— $\Lambda_{\omega_1,s}$	6.1.1
s-ludion entre multirelations	1.1
—— entre suites restrictives	4.1
s^{-1} -ludion	1.2
(ω_1,s) -ludion	6.1.2

$\mathcal{L}_s(\mathcal{K})$	5.4.2
s-plongement	2.4.3
s-restriction	2.4.4
restriction s-logique ($\leq^s$)	2.4.4
$\mathcal{G}$ -restriction ($\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$)	5.4.3
restriction $\mathcal{G}$ -logique ($\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(\mathcal{K})$)	5.4.3
signature extraite d'une autre	2.3
suite $\mathcal{G}$ -extensive	5.5
suite extensive $\mathcal{G}$ -logique	5.5
suite restrictive modèle d'un énoncé	4.4
_____ s-consistante	4.4.2
_____ avec une classe de multirelations	4.4.2
s-suite restrictive dans une classe de multirelations	4.4.2
_____ hors d'une classe de multirelations	4.6.2
$\leq s$	2.4.4
$\mathcal{I}_s(\mathcal{K})$	5.4.1
théorie engendrée par une multirelation	5.6
_____ s-universelle	5.1.1
$\mathcal{G}$ -théorie	5.1.1
s-universel	2.4.3

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3^e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . DOCTORAT ES SCIENCES

THESE DE : . . . MATHÉMATIQUES

NOM : . Monsieur . BENEJAM

Prénoms : Jean-Pierre

né le II juillet 1939 à . . . CONSTANTINE Dép^t : . . .

1^{ère} THESE : "Propriétés algébriques des langages du premier ordre".

2^e THESE (Propositions faites par l'Université) :

RESIDENT : M. LELONG

XAMINATEURS : M. NOLIN
M. FRAISSE
M. LYNDON

Vu et Approuvé

PARIS, le 8 janvier 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI

